ELEKTROMAGNETIZAM

ELEKTRIČNO POLJE - I DEO

ZBIRKA ZADATAKA

Марковић Владимир

Rešavanje zadataka često je znatna teškoca pri izučavanju fizike. Uspešno rešen zadatak izaziva osećaj istinskog zadovoljstva zbog bližeg poimanja fizičkih procesa. Stečeno teorijsko znanje na taj način postaje trajnije. Dobro snalaženje u rešavanju zadataka jedan je od bitnih kriterijuma operativnosti znanja.

Budući svesni da je temeljan pristup rešavanja konkretnog zadatka moguća spona sa potencijalnom kreativnom komponentom u vaspitaniku, mnoge zadatke završavamo u ovoj Zbirci pitanjima i komentarima. Verujemo da na taj način možemo kod pojedinaca probuditi želju da i sami postavljaju pitanja, kombinuju, traže ograničenja postavki, da shvate rešavanje kao početak a ne kraj jednog razmišljanja. Na taj način nudimo zadatak kao živu građu koja je podsticaj novim znanjima, a ne ispitnom šablonu.

Prirodno-matematički fakultet
oktobar 1991

Autori

S A D R Ž A J

KRATAK PRIKAZ OSNOVNIH FORMULA

1. Kulonov zakon. Dva naelektrisanja (električna opterećenja) q_1 i q_2 interaguju silom

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1\, q_2}{r_{12}^2}\,\vec{r}_{12} \,, \qquad (1)$$

gde je $\vec{F}_{12}$ vektor sile koja deluje na naelektrisanje 2 sa strane naelektrisanja 1, a $\vec{r}_{12}$ je radijus vektor usmeren od naelektrisanja 1 ka naelektrisanju 2. Konstanta ε_0 je tzv. električna konstanta ili apsolutna dielektrična propustljivost vakuuma ($\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot 10^{-12}$F/m).

2. Ako je r apsolutna vrednost rastojanja od tačkastog naelektrisanja q do posmatrane tačke polja, a $\vec{r}$ radijus vektor usmeren od naelektrisanja do date tačke, tada je jačina električnog polja

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q}{r^3}\,\vec{r}\,. \qquad (2)$$

3. Ako je poznata jačina polja u nekoj tački, time je određena i sila koja deluje na naelektrisanje q koje se nalazi u toj tački:

$$\vec{F} = q\vec{E}\,. \qquad (3)$$

4. Princip superpozicije. Ako su $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$,... jačine polja koja potiču od pojedinih naelektrisanja u nekoj tački, onda će jačina $\vec{E}$ rezultujućeg polja u toj istoj tački biti:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots = \sum_k \vec{E}_k \qquad (4)$$

5. Uočimo u unutrašnjosti, nekog po zapremini naelektrisanog tela, malu zapreminu i označimo je sa $\Delta\tau$ a sa Δq naelektrisanje koje pripada toj zapremini. Tada je, po definiciji,

$$\rho = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\Delta q}{\Delta\tau} \tag{5}$$

zapreminska gustina naelektrisanja u datoj tački.

6. Ako je Δq naelektrisanje koje se nalazi na delu površine ΔS, tada je, po definiciji površinska gustina naelektrisanja

$$\sigma = \lim_{\Delta S\to 0} \frac{\Delta q}{\Delta S}\,. \tag{6}$$

7. U vakuumu, električni pomeraj, ili električna indukcija, po definiciji je

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\,. \tag{7}$$

8. Teorema Gausa - Ostrogradskog glasi

$$N = \int D_n dS = q\,, \tag{8}$$

tj. fluks električnog pomeraja kroz zatvorenu površinu jednak je algebarskom zbiru svih naelektrisanja koja se nalaze u zapremini ograničenoj datom površinom.

9. Jačina polja ravnomerno naelektrisane ravni u vakuumu je

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sigma\,. \tag{9}$$

10. Jačina električnog polja blizu površine naelektrisanog provodnika je

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{10}$$

11. Jačina električnog polja u sfernom kondenzatoru iznosi

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\,, \tag{11}$$

gde je q naelekrtisanje unutrašnje obloge (sfere), a r je rastojanje posmatrane tačke polja od centra sfere.

12. Jačina električnog polja cilindričnog kondenzatora:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}\,; \tag{12}$$

ovde je q_1 naelektrisanje cilindra po jedinici dužine, a r rastojanje posmatrane tačke polja od ose cilindra.

13. Puasonova jednačina:

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho\,. \tag{13}$$

U pravougaonim dekartovim koordinatama:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} + \frac{\partial D_z}{\partial z} = \rho\,. \tag{14}$$

14. Ako je naelektrisanje +q na rastojanju l od naelektrisanja -q, dipolni moment se definiše kao

$$\vec{p} = q\vec{l}, \tag{15}$$

gde je vektor $\vec{l}$ usmeren od negativnog ka pozitivnom optrećenju.

15. U homogenom električnom polju $\vec{E}$ na električni dipol $\vec{p}$ deluje spreg sila tako da teži da vektori $\vec{p}$ i $\vec{E}$ budu paralelni. Drugim rečima, moment sprega je

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}\,. \tag{16}$$

16. Potencijalana energija električnog dipola p u električnom polju jačine E iznosi

$$W = -\,pE\cos\alpha\,, \tag{17}$$

gde je α ugao između vektora $\vec{E}$ i $\vec{p}$.

17. Neka su E_x, E_y i E_z komponente jačine električnog polja u pravouglom koordinatnom sistemu, a p_x, p_y i p_z komponente dipolnog momenta u istom sistemu. U x pravcu delovaće na dipol sila u nehomogenom polju

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z} \qquad (18)$$

Komponente sile F_y i F_z izražavaju se analognim formulama.

18. Potencijalna razlika tačaka 1 i 2 jednaka je

$$U_{12} = \int_1^2 E_s ds, \qquad (19)$$

gde se integracija izvodi duž proizvoljnog puta (u elektrostatičkom polju) koji spaja tačke 1 i 2, u smeru od 1 ka 2. E_s je projekcija vektora jačine polja na pravac elementa puta $d\vec{s}$.

19. Rad sila polja pri premeštanju opterećenja q iz tačke 1 u tačku 2 iznosi

$$A_{12} = qU_{12} . \qquad (20)$$

20. Jačina električnog polja povezana je sa potencijalom relacijom

$$\vec{E} = - \text{grad}\, U . \qquad (21)$$

21. U nekoj tački u vakuumu, na rastojanju r od tačkastog opterećenja q potencijal je

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r} . \qquad (22)$$

22. Ako je U_0 razlika potencijala između elektroda sfernog kondenzatora, onda je potencijal neke tačke na udaljenosti r od centra sistema

$$U = U_0 \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} , \qquad (23)$$

gde su a i b poluprečnici manje i veće sfere, respektivno.

23. Ako je U_0 razlika potencijala između obloga ravnog kondenzatora, onda je potencijal u tački na rastojanju x od pozitivno naelektrisane obloge

$$U = U_0 \frac{x}{d} , \qquad (24)$$

gde je d debljina kondenzatora.

24. Potencijal u cilindričnom kondenzatoru menja se po logaritamskom zakonu:

$$U = U_0 \frac{\ln(r/a)}{\ln(b/a)} \qquad (25)$$

U ovoj formuli U_0 je potencijalna razlika između obloga kondenzatora, a i b su radijusi manjeg i većeg cilindra respektivno, dok je r rastojanje od ose sistema do tačke u kojoj se traži potencijal.

25. Rezultujući potencijal koji potiče od nekoliko tačkastih opterećenja nalazi se primenom principa superpozicije

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \qquad (26)$$

Ovde je U potencijal u posmatranoj tački u odnosu na beskonačnost a r_i - rastojanje te tačke od i-tog opterećenja veličine q_i.

26. Potencijal koji potiče od zapreminski raspoređenih opterećenja može se izračunavati po formuli

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_\tau \frac{\rho d\tau}{r} \qquad (27)$$

Ovde je ρ zapreminska gustina opterećenja, a r rastojanje od posmatrane tačke do elementa zapremine $d\tau$. Integracija se izvodi po celoj zapremini τ naelekrisanog tela.

27. Ako su opterecenja raspodeljena jedino po površini S nekog tela, potencijal će se izražavati formulom

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \frac{\sigma dS}{r} , \qquad (28)$$

gde je σ površinska gustina opterecenja.

28. Jačina električnog polja koju daje električni dipol dipolnog momenta p u tački s koordinatama r i α (polarni sistem koordinata) je

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}\,. \qquad (29)$$

Formula važi ako je $p/q \ll r$, q je opterećenje dipola. Vektor $\vec{E}$ čini ugao β sa vektorom $\vec{r}$ i važi

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\,. \qquad (30)$$

29. Laplasova jednačina:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \qquad (31)$$

omogućava da se izračuna funkcija U(x,y,z) i tako odredi potencijal u tačkama polja između provodnika zadatog potencijala.

30. Ako je q opterecenje obloga kondenzatora čiji je kapacitet C, za napon između obloga možemo pisati

$$U = \frac{q}{C}\,. \qquad (32)$$

31. Kapacitet ravanskog kondenzatora

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{d}\,, \qquad (33)$$

gde je ε dielektrična propustljivost izolatora, S površina obloga a d debljina kondenzatora.

32. Kapacitet sfernog kondenzatora:

$$C = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{1/a - 1/b} \qquad (34)$$

gde su a i b poluprečnici unutrašnje i spoljašnje sfere, respektivno.

33. Kapacitet cilindričnog kondenzatora po jedinici dužine cilindra:

$$C_1 = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(b/a)}\,, \qquad (35)$$

gde su a i b radijusi cilindara, manjeg i većeg respektivno.

34. Kapacitet dvožičnog voda po jedinici dužine

$$C_1 \simeq \frac{\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(d/a)} \qquad (36)$$

Ovde je d rastojanje između provodnika, a a poluprečnik provodnika.

35. Kapacitet žičanog provodnika nad provodnom ravni, po jedinici dužine je

$$C_1 \simeq \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\ln(2h/a)}\,. \qquad (37)$$

Ovde je h visina provodnika iznad ravni, a a je poluprečnik žičanog provodnika.

36. Energija kondenzatora kapaciteta C koji je opterecen do napona U, iznosi

$$W = \frac{1}{2}CU^2. \qquad (38)$$

Formula se može pisati i u obliku

$$W = \frac{q^2}{2C}\,. \qquad (39)$$

ili

$$W = \frac{1}{2}qU\,, \qquad (40)$$

gde je q opterećenje obloga.

37. Kapacitet kondenzatora, koji su vezani paralelno, jednak je sumi kapaciteta pojedinih kondenzatora:

$$C = \sum C_i\,. \qquad (41)$$

38. Pri rednom vezivanju kondenzatora sabiraju se recipročne vrednosti kapaciteta:

$$\frac{1}{C} = \sum \frac{1}{C_i} . \qquad (42)$$

39. Zapreminska gustina energije električnog polja je

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 , \qquad (43)$$

gde je ε dielektrična propustljivost sredine, a E jačina električnog polja u datoj tački.

40. Ukupna energija električnog polja može biti predstavljena u obliku

$$W = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int_\tau \varepsilon E \, d\tau , \qquad (44)$$

gde se integracija izvodi po celoj zapremini τ, gde postoji električno polje.

41. Ako je τ neka fizički mala zapremina polarizovanog dielektrika, a $\vec{p}_i$ dipolni moment i-tog molekula u njoj, tada relacijom

$$\vec{P} = \frac{1}{\tau} \sum_i \vec{p}_i \qquad (45)$$

definišemo vektor polarizacije $\vec{P}$.

42. Kod homogene polarizacije važi

$$\sigma' = P_n \qquad (46)$$

P_n je projekcija vektora $\vec{P}$ na pravac spoljašnje normale na posmatranoj površini, a σ' je površinska gustina polarizacionih opterećenja.

43. Ako je ρ' zapreminska gustina polarizacionih opterećenja (pri nehomogenoj polarizaciji) onda važi relacija

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = - \rho' . \qquad (47)$$

44. Vektor električnog pomeraja definiše se u dielektriku ovako:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} . \qquad (48)$$

45. Na granici dva dielektrika (homogena i homogeno polarizovana) važe ovi granični uslovi

$$E_{t1} = E_{t2} , \qquad (49)$$

$$D_{n1} = D_{n2} . \qquad (50)$$

Na razdvojnoj površini jednake su tangencijalne komponente vektora $\vec{E}$ i normalne komponente vektora $\vec{D}$.

46. Za izotropni dielektrik važi

$$\vec{P} = \alpha\varepsilon_0 \vec{E} , \qquad (51)$$

gde je α dielektrična susceptibilnost dielektrika.

47. Ako važi relacija (51), može se pisati

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} , \qquad (52)$$

pri čemu je $\varepsilon = 1 + \alpha$ dielektrića propustljivost supstancije.

48. Posmatrajmo razdvojnu površinu dva dielektrika. Neka je α_1 ugao koji zaklapa vektor $\vec{E}_1$ sa normalom na njoj, a α_2 ugao koji zaklapa vektor $\vec{E}_2$ sa tom istom normalom ($\vec{E}_1$ je u prvom a $\vec{E}_2$ u drugom dielektriku). Važi zakon prelamanja linija električnog polja:

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} . \qquad (53)$$

49. Kulonov zakon za dielektrik:

$$E(r) = \frac{E_0(r)}{\varepsilon} . \qquad (54)$$

Jačina polja tačkastog opterecenja u homogenom dielektriku smanjuje se ε puta u odnosu na vrednost u vakuumu.

50. Pri elektronskoj polarizaciji, dipolni momenat molekula $\vec{p}$ proporcionalan je jačini polja $\vec{E}'$ koje deluje na molekul

$$\vec{p} = \beta\, \varepsilon_0 \vec{E}' . \qquad (55)$$

Ovde je β tzv. polarizabilnost molekula.

51. Za nepolarne dielektrike, za kristale s kubičnom rešetkom ($\vec{E}' = \vec{E} + \vec{P} / 3\varepsilon_0$) ,

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{n\beta}{3} . \qquad (56)$$

Ovo je Klauzijus - Mosotijeva formula. U njoj, n predstavlja koncentraciju molekula.

52. Za polarne dielektrike, u aproksimaciji $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{P} / 3\varepsilon_0$, važi

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{1}{9\varepsilon_0} \frac{p_0 n}{kT} , \qquad (57)$$

gde je p_0 dipolni moment jednog molekula, k Bolcmanova konstanta a T apsolutna temperatura dielektrika.

53. Ako je n koncentracija naelektrisanih čestica a e opterećenje jedne od njih (na primer, elektrona), onda je gustina struje

$$\vec{j} = n\, e\, \vec{v} , \qquad (58)$$

gde je $\vec{v}$ brzina čestica.

54. Ako je dq naelektrisanje koje je prošlo kroz presek provodnika za vreme dt onda je

$$i = \frac{dq}{dt} \qquad (59)$$

jačina struje. Ona je povezana sa gustinom struje relacijom

$$i = \int_S j_n dS , \qquad (60)$$

gde se integracija izvodi po celoj površini bilo kog preseka provodnika.

55. Ako je ρ zapreminska gustina opterecenja a j_x, j_y, i j_z projekcija vektora gustine struje $\vec{j}$ na ose pravouglog Dekartovog sistema, važi jednačina kontinuiteta u diferencijalnoj formi.

$$-\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} . \qquad (61)$$

56. Za mnoge provodnike, posebno za metale, postoji linearna veza između priloženog napona i struje:

$$i = \frac{U}{R} , \qquad (62)$$

gde je R električna otpornost. Ova relacija se naziva Omov zakon.

57. Otpornost žice dužine l i površine poprečnog preseka S iznosi

$$R = \rho \frac{l}{S} . \qquad (63)$$

Ovde je ρ specifična otpornost supstancije od koje je žica napravljena.

58. Temperaturski koeficijent otpornosti definiše se kao

$$\alpha = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dT} . \qquad (64)$$

On daje relativni priraštaj otpornosti pri povećanju temperature za 1K.

59. U izotropnoj sredini, gustina struje $\vec{j}$ i jačina električnog polja povezani su relacijom

$$\vec{J} = \frac{\vec{E}}{\rho}, \tag{65}$$

gde je ρ specifična otpornost supstancije.

60. Rad električne struje i, koja teče u delu strujnog kola gde valada napon U, iznosi

$$A = U\, i\, t, \tag{66}$$

gde je t vreme za koje se proces posmatra.

61. Ako je u pitanju provodnik prve vrste (u mirovanju) koji je homogen i za koji važi Omov zakon, relaciji (66) može se dati oblik

$$A = r\, i^2\, t, \tag{67}$$

gde je r otpornost provodnika. Ova relacija poznata je pod imenom Džulov zakon.

62. Definiciona relacija za elektromotornu silu galvanskog elementa glasi

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q}, \tag{68}$$

gde je A rad električne struje a q ukupno opterećenje proteklo kolom. $\mathcal{E}$ je maksimalni rad date hemijske reakcije.

63. Omov zakon za zatvoreno strujno kolo:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \tag{69}$$

Ovde je R + r ukupna otpornost kola (zbir spoljašnje i unutrašnje otpornosti).

64. Ako imamo strujni izvor e.m.s. $\mathcal{E}$, roz koji protiče struja jačine i, napon na njegovim krajevima je

$$U_{12} = ri - \mathcal{E}. \tag{70}$$

Ovde je r unutrašnja otpornost izvora. Uz ovu relaciju treba znati i pravilo znaka: smatra se da je struja pozitivna ako je usmerena od tačke 1 ka tački 2; e.m.s. je pozitivna ako, idući od 1 ka 2, prvo nailazimo na negativni a onda na pozitivni pol izvora.

65. Relacijom

$$\mathcal{E} = -\oint E_l^{*}\, dl \tag{71}$$

daje se najopštija efinicija e.m.s. pogodna za bilo koji slučaj. Ovde je E^{*} tzv. jačina polja stranih sila a E_l^{*} komponenta tangencijalna na putanju l duž koje se vrši integracija.

66. Prvo Kirhofovo pravilo:

$$\sum i_k = 0\,. \tag{72}$$

Algebarski zbir struja u granama koje polaze iz jednog čvora jednak je nuli.

67. Drugo Kirhofovo pravilo:

$$\sum i_n r_n = \sum \mathcal{E}_n\,. \tag{73}$$

68. Pri rednom vezivanju otpornika, pojedine otpornosti se sabiraju da bi se dobila ekvivalentna otpornost,

$$R = \sum r_n\,. \tag{74}$$

69. Deo kola sastavljen od paralelno vezanih provodnika ima provodnost koja je jedanaka zbiru provodnosti pojedinih provodnika; zato se ekvivalentna otpornost u tom slučaju izračunava po formuli

$$\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{r_n}\,. \tag{75}$$

70. Neka je n identičnih izvora struje (e.m.s. $\mathcal{E}_1$ i unutrašnja otpornost r_1) vezana redno i priključena na spoljašnji deo kola; ta baterija deluje kao jedan izvor struje koji ima e.m.s. $\mathcal{E}$ i unutrašnju otpornost r, pri čemu je

$$\mathcal{E} = n\,\mathcal{E}_1\,, \qquad r = n r_1\,. \tag{76}$$

71. Pri paralelnom vezivanju n izvora struje e.m.s. $\mathcal{E}_1$ i unutrašnje otpornosti r_1, baterija deluje kao jedan izvor struje ekvivalentne e.m.s. $\mathcal{E}$ i unutrašnje otpornosti r, pri čemu je

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1\,, \qquad r = \frac{r_1}{n}\,. \tag{77}$$

72. Izvor struje date e.m.s. $\mathcal{E}$ i unutrašnje otpornosti r davaće maksimalnu snagu na otporu R pod uslovom da je $R = r$. Tada je

$$P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} \qquad (78)$$

73. Zakon održanja energije za električno polje:

$$\sum \mathcal{E} i dt = \delta A + dW + \sum r i^2 dt \qquad (79)$$

Rad svih izvora struje mora biti jednak zbiru tri člana, a to su: a) mehanički rad sila električnog polja, b) priraštaj energije električnog polja i c) Džulova toplota.

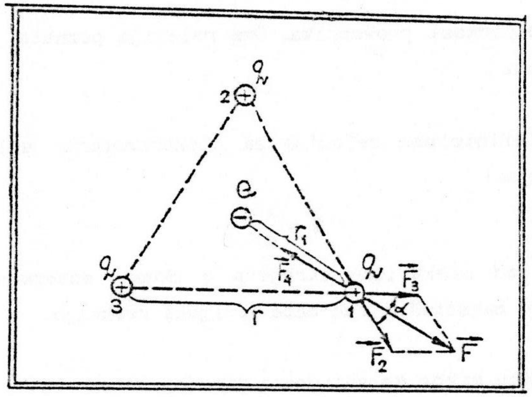
1. NAELEKTRISANJA

1.1) Tri jednaka pozitivna opterećenja q nalaze se na temenima jednakostraničnog trougla (sl.1.1).

a) Opterećenje Q treba postaviti u centar trugla i naći njegovu veličinu pod uslovom da je sistem opterećenja u ravnoteži.

b) Izračunati Q ako je $q = 1{,}732\ \mu C$.

c) Da li je postignuta ravnoteža stabilna?



Sl.1.1

Rešenje:

a) Opterećenje u temenu 1 biće u ravnoteži ako je vektorski zbir sila koje deluju na njega jednak nuli. Sa $\vec{F}_2$ obeležimo silu kojom ga odibja opterećenje u temenu 2, a sa $\vec{F}_3$ silu odbijanja zbog prisustva opterećenja u temenu 3. Opterećenje Q privlači opterećenje q u temenu 1 silom $\vec{F}_4$. Neka je $\vec{F}$ rezultanta sila $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$. Tada je:

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0 \,. \qquad (1)$$

Primenjujući Kulonov (Coulomb) zakon, nalazimo

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2} = F_3,$$

$$F_4 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cancel{q^2}\; q\cdot Q}{r_1^2}$$

Sa sl.1.1 vidimo da je

$$F^2 = F_2^2 + F_3^2 - 2F_2F_3\cos(180^\circ - \alpha),$$

$$F = F_2\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}\ .$$

Relacija 1, koja se svodi na jednakost $F = F_4$, daje

$$F_4 = F_2\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}\ . \qquad (2)$$

Odavde se dobija

$$Q = q\,\frac{r_1^2}{r^2}\sqrt{2(1 + \cos\alpha)}\ . \qquad (3)$$

Pošto je $\frac{r_1}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, imamo definitivno:

$$Q = \frac{q}{\sqrt{3}}\ . \qquad (4)$$

b)

$$Q = \frac{1,73}{\sqrt{3}}\ \mu C \cong 1\mu C\ .$$

c) Ravnoteža je nestabilna. Odakle se to vidi? Da li se tu radi o nekom opštijem svojstvu elektrostatičkog polja? Čitalac zainteresovan ovim pitanjima treba da pročita u Udžbeniku izlaganje na strani 90.

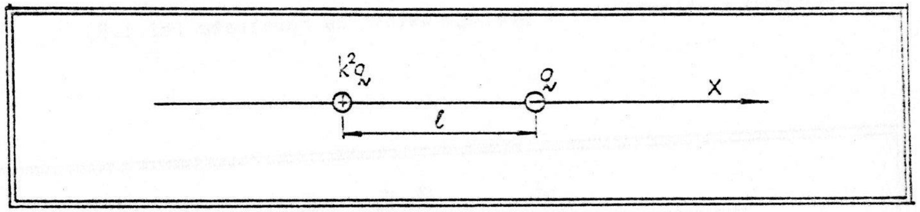
Pitanja i komentari. Da li je potrebno da proveravamo ravnotežu ostala dva opterećenja u temenima 2 i 3? Pokušajte da rešite analogan zadatak za kvadrat, a posle toga pokušajte generalizaciju postupka za mnogougaonik sa n stranica. Izlazi li, iz te formule, za n = 3 rezultat (4)? Događa li se nešto neobično kada $n\to\infty$?

1.2) Dva opterećenja, $-q$ i k^2q ($k>1$), utvrđena su na rastojanju l jedno od drugog. Treće optrećenje q_1 moguće je premeštati duž prave koja prolazi kroz ova dva opterećenja.

a) Odrediti onu tačku na pravoj u kojoj će q_1 biti u ravnoteži.
b) Gde se ona nalazi, ako je $k = 4$ i $l = 6$ cm?
c) Može li ta ravnoteža biti stabilna?

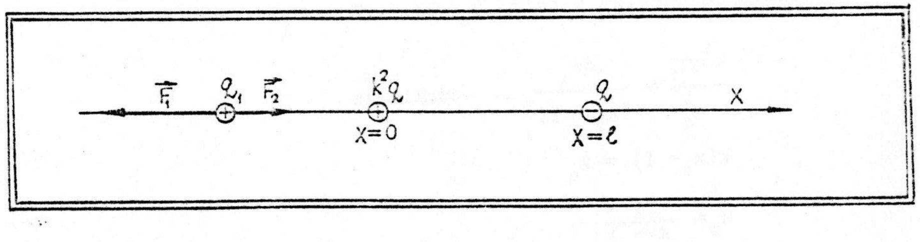
Rešenje:

a) Postavimo osu x kroz opterećenja $-q$ i k^2q i neka je optrećenje k^2q locirano u tački $x = 0$ (sl.1.2)



Sl.1.2.

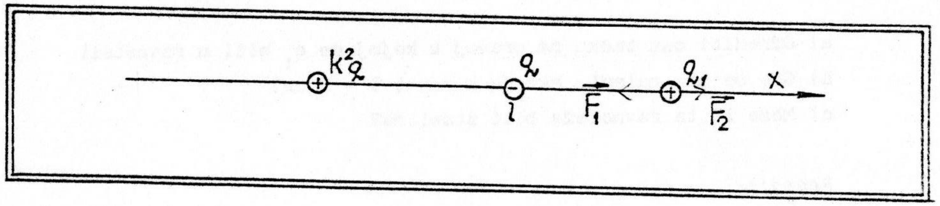
Sa F_1 obeležimo silu kojom opterećenje k^2q deluje na q_1, a sa F_2 silu kojom $-q$ deluje na q_1. Ako je q_1 locirano u oblasti $x < 0$, ravnoteža se ne može postići, što se vidi sa sl.1.3.



Sl.1.3.

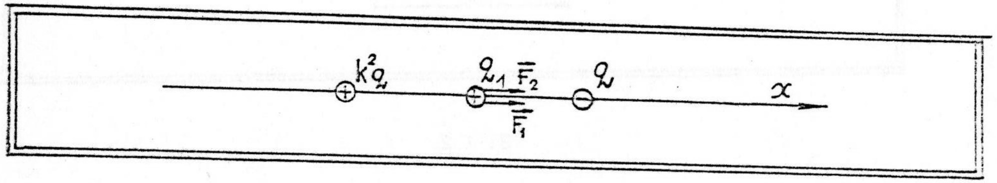
$F_1 > F_2$ (uvek)

Ravnoteže nema ni u oblasti $0<x<l$ jer su tamo sile F_1 i F_2 istog smera (sl.1.4)



Sl.1.~~4~~ 5

Međutim u oblasti $x > l$ postoje uslovi za ravnotežu (sl.1.5)



Sl.1.~~5~~. 4

Ravnoteža se postiže u tački x_0 gde je $F_1 = F_2$

$$\frac{k^2qq_1}{x_0^2} = \frac{qq_1}{(x_0 - l)^2}, \quad \text{odakle je}$$

$$k(x_0 - l) = x_0 ,$$

$$x_0 = \frac{kl}{k - 1} .$$

b) $$x_0 = \frac{4 \cdot 6 \text{ cm}}{4 - 1} = \frac{4 \cdot 6}{3} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$

(q_1 treba postaviti 2 cm desno od opterećenja $-q$)

c) Ako je optrećenje q_1 negativno, ravnoteža je stabilna. To znači, ako izvedemo opterećenje iz položaja ravnoteže, javiće se sila koja teži da ga vrati u tačku x_0. Čitalac može to da proveri, posmatrajući slučaj kada je q_1 pomereno iz pložaja ravnoteže za neku malu veličinu δ. Rezultanta sila u pravcu +x ose će tada biti:

$$F = \frac{qq_1}{(x_0 - l - \delta)^2} - \frac{k^2qq_1}{(x_0 - \delta)^2} .$$

Videti da li je ona pozitivna za $q_1 < 0$ i šta će biti ako je $q_1 > 0$? Imamo li tada stabilnu ravnotežu ?

Pitanja i komentari. Da li je rezultat ovog zadatka u protivurečnosti sa prethodnim zadatkom ? Da li u formulaciji zadatka treba obavezno reći da su opterećenja učvršćena ? Još jednom pogledajte primedbu na kraju prvog zadatka !

1.3) Tanki štap dužine l (Sl.1.6) ravnomerno je naelektrisan po celoj dužini (podužna gustina opterećenja je τ). Na rastojanju r_0 od štapa nalazi se opterećenje q_1. Ono je podjednako udaljeno od krajeva štapa.

a) Odrediti silu uzajmnog dejstva tačkastog opterećenja i štapa.

b) Izrčunati tu silu ako je r_0 = 10 cm, l = 20 cm, $q_1 = 10^{-9}$C i $\tau = 5{,}5 \; 10^{-8}$ C/m.

c) Kako očekujete da će se promeniti sila ako štap malo deformišemo kao što je prikazano na slici sl.1.7?

Rešenje:

Uočimo na štapu beskonačno malu dužinu dl; tom delu pripada opterećenje $dq = \tau dl$ koje možemo smatrati tačkastim; prema Kulonovom zakonu, element dužine dl interaguje sa opterećenjem q_1 shodno relaciji

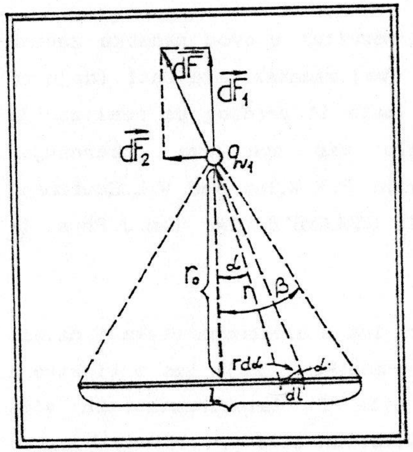
$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 \tau dl}{r^2} . \quad \text{(u vakumu)} \qquad (1)$$

(videti sl.1.6. za značenje oznake r i za smisao ostilih oznaka).

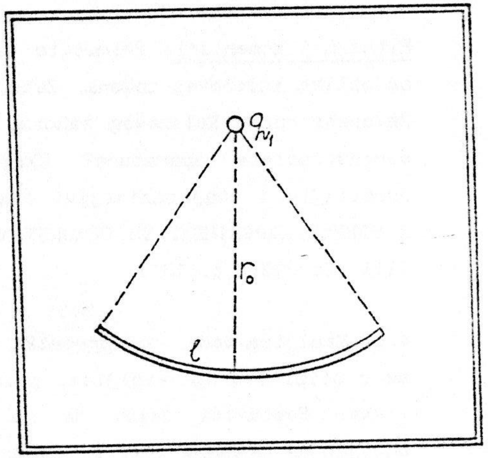
Pošto je $r = r_0/\cos\alpha$ i $dl = rd\alpha/\cos\alpha$, sledi:

$$dF = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\,d\alpha \qquad (2)$$

Sila $d\vec{F}$, kao vektor, može se razložiti na dve komponente (videti sl.1.6.)



Sl. 1.6.



Sl. 1.7.

Pri tome je:

$$dF_1 = dF\cos\alpha\,,$$
$$dF_2 = dF\sin\alpha\,. \qquad (3)$$

Komponentu dF_2 ne treba uzimati u obzir; iz razloga simetrije, ukupna sila mora biti upravljena duž ose koja je normalna na štap, a prolazi kroz njegovu sredinu. Dakle, ukupna sila je

$$F = \int dF\cos\alpha\,,$$

$$F = \int_{-\beta}^{+\beta} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q_1\tau}{r_0}\,\cos\alpha\,d\alpha\,,$$

$$F = \frac{q_1\tau}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\,|\sin\beta - \sin(-\beta)|\,,$$

$$F = \frac{q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\sin\beta\,.$$

Sa sl.1.6. se vidi da je

$$\sin\beta = \frac{l/2}{\sqrt{r_0^2 + (l/2)^2}} = \frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}\,.$$

Na taj način imamo definitivno:

$$F = \frac{q_1\tau}{2\pi\varepsilon_0 r_0}\cdot\frac{l}{\sqrt{4r_0^2 + l^2}}\,,$$

b)
$$F = \frac{10^{-9}C\cdot 5{,}5\cdot 10^{-8}\,\frac{C}{m}}{\frac{1}{2}\,\frac{10^{-9}}{9}\,\frac{F}{m}\cdot 0{,}1\,m}\;\frac{0{,}2}{\sqrt{4\cdot 0{,}1^2 + 0{,}2^2}}\;\frac{C^2}{m\cdot F}\,,$$

$$F = 7{,}0\cdot 10^{-6}N\,.$$

$$\left[\frac{C^2}{m\cdot F}\right] = \left[\frac{C^2}{m\cdot\frac{C}{V}}\right] = \left[\frac{C^2V}{m\cdot C}\right] = \left[\frac{C\,\frac{J}{C}}{m}\right] = \left[\frac{J}{m}\right] =$$

$$= \left[\frac{N\cdot m}{m}\right] = [N]$$

c) Zamislimo da smo štap savili tako da čini deo kružnice, poluprečnika r_0, sa centrom gde je opterećenje q_1 (s.l. 7). Za tu geometriju problema silu je lako izračunati, slično što smo ovde radili. Taj rezultat vam omogućava da odgovorite na postavljeno pitanje.

Pitanja i komentari: U čemu je razlika između rešenja za pravi štap i savijeni štap? Možete li skicirati silu u funkciji odnosa l/r_0, za jedan i drugi slučaj? Uporediti.

1.4.) Dve male provodne kuglice obešene su dugačkim neprovodnim

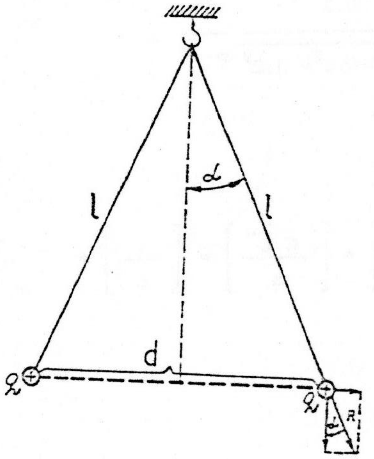
nitima o jednu kukicu. Kuglice su opterećene istom količinom opterećenja q.
Dužina niti je l, a rastojanje između kuglica je d (sl. 1.8.).

a) Naći novo ravnotežno rastojanje d' koje nastaje kada se opterećenja kuglica dva puta smanje ($q' = q/2$).
b) Izračunati d' ako je d = 1 cm.

Rešenje:

Položaj ravnoteže određen je iz uslova da rezultanta $\vec{R}$, dobijena slaganjem Kulonove sile i težine kuglice, ima pravac niti o koju je obešena kuglica. Dakle:

$$\frac{F}{G} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{d/2}{l} \qquad (1)$$



Sl. 1.8.

Kada se smanji opterećenje kuglica sa q na $q' = q/2$, smanjiće se i rastojanje d; sada će to biti nova dužina d' određena opet iz uslova ravnoteže:

$$\frac{F}{G} = \operatorname{tg}\alpha' = \frac{d'/2}{l}. \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) nalazimo

$$\frac{F}{F'} = \frac{d}{d'}. \qquad (3)$$

Pošto je $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{d^2}$ i $F' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(q/2)^2}{d'^2}$,

nalazimo $\frac{F}{F'} = \frac{4d'^2}{d^2}$, odnosno:

$$\frac{d}{d'} = 4\frac{d'^2}{d^2}, \text{ i konačno:}$$

$$d' = \frac{d}{\sqrt[3]{4}}.$$

b) $$d' = \frac{1\ \text{cm}}{\sqrt[3]{4}} \approx 0{,}63\ \text{cm}.$$

Pitanja i komentari: Primetite da rezultat u ovom zadatku zavisi od oblika Kulonovog zakona. Zato, ovaj zadatak može dati ideju za demonstriranje Kulonovog zakona. Imate li predlog za realizaciju demonstracione aparature? Ukoliko vas sve ovo interesuje, pročitajte i ovaj zanimljivi članak: P.H. Wiley and W.L. Stutzman, A SIMPLE EXPERIMENT TO DEMONSTRATE COULOMB'S LAW (Am. J. Phys., 46 (11), Nov. 1978, p. 1131).

1.5) Kapljica vode, poluprečnika r_m ima m elektrona viška i nalazi se u blizini druge kapljice, poluprečnika r_n koja ima n elektrona viška. Postaviti uslov da je sila F_e (elektrostatička sila odbijanja) jednaka sili F_g (gravitaciona sila privlačenja) za te dve kapljice.

a) Koja se informacija može izvući iz tog postupka?
b) Ako su kapljice jednake, izračunati njihov poluprečnik u slučaju m = n = 1.

Rešenje:

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{mne^2}{r^2}, \quad e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\text{C};$$

r je rastojanje između centara kapljica za koje pretpostavljamo da su sfernog oblika.

$$F_g = \gamma\frac{m_m m_n}{r^2},$$

$$m_m = \rho\frac{4}{3}\pi r_m^3, \quad m_n = \rho\frac{4}{3}\pi r_n^3 \quad \text{(mase kapljica)}$$

$\rho \rightarrow$ gustina vode

$F_e = F_g \Rightarrow$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{mne^2}{r^2} = \gamma\ \frac{1}{r^2}\rho^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 r_m^3 r_n^3 .$$

Odavde možemo naći proizvod poluprečnika kapljice:

$$r_m \cdot r_n = \sqrt[3]{\frac{9\, m\, n\, e^2}{(4\pi)^2\, 4\pi\varepsilon_0 \gamma\rho^2}} .$$

b) $$r_1 = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{4\pi\varepsilon_0(4\pi)^2\gamma\rho^2}} = 7{,}6\cdot 10^{-5}\text{m} .$$

Pitanja i komentari: Ovakav zadatak, i slični, daju se u mnogim udžbenicima i zbirkama zadataka; cilj je da se uoči razlika u intenzitetima između Kulonove i gravitacione sile. Prva je za mnogo redova veličine jača. Modificirajte zadatak tako da rezultat, za vas lično, bude još očigledniji (na primer, koliko molekula vode ima u toj kapljici, itd.). U nekoj naučno - popularnoj knjizi pročitajte o savremenom metodu klasifikacije sila u prirodi (na primer, u knjizi: В.И.РУСКИН, ПУТ В МИКРОМИР, "Казахстан" Алма - Ата 1982., с. 26-43).

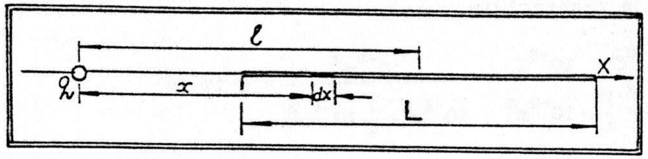
1.6) Po tankom štapu dužine L ravnomerno je raspoređeno opterećenje Q. Tačkasto optrećenje q, suprotnog znaka, nalazi se na pravcu na kojem leži i štap, a udaljeno je od sredine provodnika za dužinu l.

a) Naći silu privlačenja između štapa i tačkastog opterećenja.

b) Koliko se ta sila razlikuje od sile interakcije optercenja q i opterećenja Q lociranog u centru štapa (na rastojanju l od opterećenja q)? Odgovor dati smatrajući da je $l \gg L/2$. Kada bi u posmatranom zadatku smeli da prosto primenimo Kulonov zakon za interakciju tačkastih opterećenja?

c) Izračunati silu, o kojoj se govori u delu a) zadatka, za slučaj da je l = 10 cm, i $Q = 10^{-5}$C.

Rešenje:



Sl. 1.9

Neka je τ linijska gustina opterećenja: $\tau = \frac{Q}{L}$.
Postavimo x osu kao što je pokazano na slici 1.9. Elementu dužine štapa dx odgovara opterećenje $dq = \tau\, dx$. Primenjujući Kulonov zakon za tačkasta opterecenja q i τdx dobijamo:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\tau dx}{x^2} .$$

Odavde nije teško naći ukupnu traženu silu F:

$$F = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0}\int_{l-L/2}^{l+L/2}\frac{dx}{x^2} = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left|-\frac{1}{x}\right|_{l-L/2}^{l+L/2} ,$$

$$F = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{l-\frac{L}{2}} - \frac{1}{l+\frac{L}{2}}\right] = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-l+\frac{L}{2}+l+\frac{L}{2}}{l^2-\left(\frac{L}{2}\right)^2} ,$$

$$F = \frac{q\tau}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{L}{l^2 - \frac{L^2}{4}} \quad \text{ili}$$

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l^2}\cdot\frac{l^2}{l^2-\frac{L^2}{4}} . \tag{1}$$

b) Pošto je $\frac{1}{1-\frac{1}{4}\frac{L^2}{l^2}} \simeq 1 + \frac{1}{4}\frac{L^2}{l^2}$ $(l \gg L/2)$, imamo

$$F \simeq \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l^2} + \frac{1}{4}\frac{L^2}{l^2}\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l^2} .$$

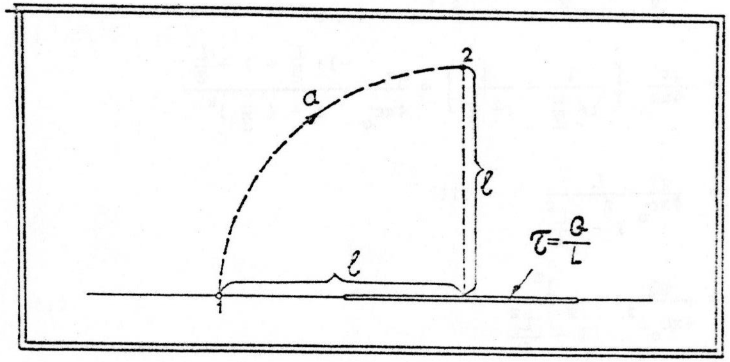
Prvi član u izrazu za silu opisuje interakciju tačkastih opterećenje q i Q na rastojanju l; drugi član je tražena korekcija na konačnost protezanja opterećenja. Drugi član, u slučaju kad $L/l \to 0$, postaje zanemarljiv.

c) $$F = \frac{10^{-10}C \cdot 10^{-5}C}{\frac{10^{-9}}{9}\,\frac{F}{m}\cdot 10^{-2}m^2} \cdot \frac{10^{-2}m^2}{10^{-2}m^2 - \frac{1}{4}10^{-4}m^2} \approx 9\cdot 10^{-4}N \;.$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{C^2}{F\cdot m}\right] = \left[\frac{C^2}{\frac{C}{V}\cdot m}\right] = \left[\frac{C\cdot V}{C\cdot m}\right] = \left[\frac{C\,\frac{J}{C}}{m}\right] = \left[\frac{J}{m}\right] = \left[\frac{N\cdot m}{m}\right] = [N]$$

Pitanja i komentari. Mi smo našli izraz za silu (videti zadatak br. 1.3.) kada je tačkasto opterećenje pored štapa, a ne u njegovom produžetku. Korisno je uporediti rešenje tog zadatka sa izrazom (1). U kom slučaju je veće odstupanje od formule za silu dva tačkasta opterećenja? Možete li kvalitativno skicirati kako će se menjati sila kad opterećenje q putuje od tačke 1 do tačke 2 duž putanje a (sl.1.10.)?

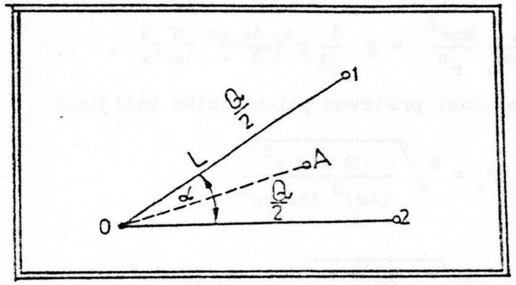


Sl.1.10.

1.7) Dve ravnomerno pozitivno opterećene duži, svaka dužine L i opterećenja Q/2 spojene su u tački O (sl.1.11) tako da zaklapaju ugao $\alpha = 60^\circ$. Uočimo na simetrali ugla tačku A, koja je udaljena od tačke O za dužinu L/3. U tački A nalazi se negativno

opterećenje q.

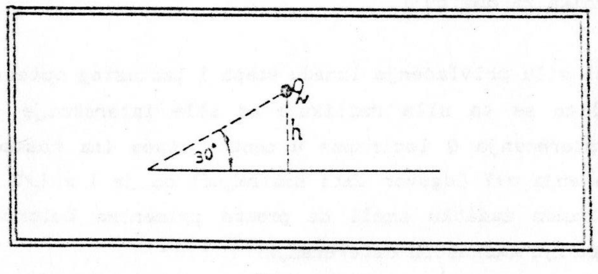
a) Naći ukupnu silu koja deluje na q.



Sl.1.11.

Rešenje:

Ako bismo tačke 1 i 2 spojili pomoću duži koja ima jednaku linijsku gustinu opterećenja kao i duži $\overline{01}$ i $\overline{02}$, dobili bismo sistem opterećenja koji na opterećenje q ne bi delovao nikakvom silom (taj stav je očigledan, iz razloga simetrije, jer po uslovima zadatka, tačke 0, 1 i 2 čine temena jednakostraničnog trougla, a tačka A je centar tog trougla). Dakle, za rešenje zadatka potrebno je znati kojom silom duž $\overline{12}$ privlači opterećenje q. Označimo tu silu sa F_{12}. Tada je tražena sila prosto $-F_{12}$ (istog intenziteta kao i sila F_{12}, ali usmerena od tačke A ka tački O). No, u jednom predhodnom zadatku mi smo pokazali kako se nalazi sila za ovakvu konfiguraciju (sl.1.12.).



Sl.1.12.

Rezultat je (videti zadatak 1.3.)

$$F = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\tau q}{h}\,\cos 30^\circ$$

(τ je linijska gustina opterećenja, $\tau = \frac{Q/2}{L}$).

Dakle, intenzitet tražene sile je:

$$F = \frac{3\tau q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ .$$

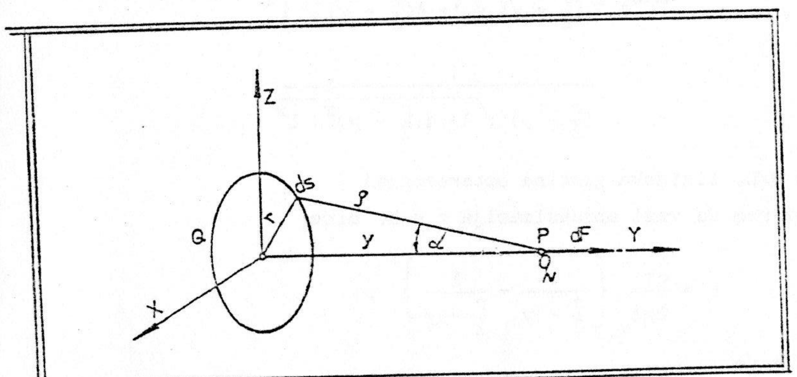
1.8) Kružnica poluprečnika r, ravnomerno opterećena količinom opterećenja Q, leži u xz ravni pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema (centar kružnice poklapa se sa koordinatnim početkom).

a) Kojom silom deluje ta kružnica na tačkasto opterećenje q smešteno negde na y osi?

b) Na kom mestu je ta sila maksimalna? Kolika je ta maksimalna sila?

c) Izračunati maksimalnu silu, ako je Q = 1mC, q = 1nC, r = 0,62m.

Rešenje:



Sl. 1.13.

Posmatrajmo slučaj kada su Q i q istoimena opterećenja. Tada je sila upravljena duž +y ose. Iz simetrije zadatka se vidi da rezultujuća sila ne može imati x ili/i z komponentu. Uočimo elemenat kružnice ds; on će sadržati opterećenje dQ = τ ds, gde je

τ linijska gustina opterećenja ($\tau = Q/2\pi r$). Element je udaljen za dužinu ρ od tačke P u kojoj tražimo silu (poteg ρ zaklapa ugao α sa y osom). Iz Kulonovog zakona sledi:

$$dF = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\tau ds}{\rho^2}\,\cos\alpha\ .$$

Odavde je lako naći ukupnu silu:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\tau}{\rho^2}\,\cos\alpha \int\limits_{\substack{\text{(obim}\\ \text{kružnice)}}} ds\ ,$$

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q\tau}{\rho^2}\,\cos\alpha\cdot 2\pi r\ .$$

Pošto je $\cos\alpha = \frac{y}{\rho}$, biće definitivno:

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{\left(\sqrt{y^2 + r^2}\,\right)^3}\ .$$

b)

$$\frac{dF}{dy} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(y^2 + r^2)^{3/2} - \frac{3}{2}\,y(y^2 + r^2)^{1/2}\cdot 2y}{(y^2 + r^2)^3}\ .$$

$\frac{dF}{dy} = 0 \Rightarrow y = y_m$; $F(y_m) = F_m$ (maksimalna vrednost sile)

$$y_m = \pm\,\frac{r}{\sqrt{2}}\ .$$

$$F_m = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{y_m}{\left(\sqrt{y_m^2 + r^2}\,\right)^3}\ .$$

$$F_m = \frac{2}{1^{3/2}}\,\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$? !!!

$$F_m = \frac{2}{3^{3/2}}\,\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 y_m^2}$$?

c)

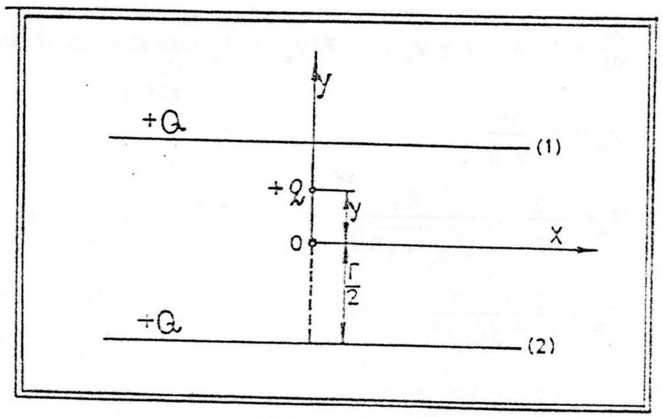
$$F_m = \frac{1}{(\sqrt{3})^3}\,\frac{10^{-9}\cdot 10^{-3}}{\frac{10^{-9}}{9}\,(0,44)^2}\ \text{N} \approx 9\cdot 10^{-3}\ \text{N}.$$

Pitanja i komentari. Na osnovu kojih argumenata možete zaključiti, ne vršeći nikakva izračunavanja, da funkcija $F(y)$ mora imati maksimum (posmatrajte šta opredeljuje karakter sile za $y\to 0$, a šta za $y\to\infty$)? Na šta se svodi izraz za F kada je $y \gg r$? Uporediti silu F_m sa silom interakcije opterećenja q i Q na međusobnom rastojanju y_m. Skicirajte grafik sile u okolini koordinatnog početka ($y \ll r$). Ako bi tačkasti objekt s negativnim opterećenjem q imao i masu m, onda bi morao da se realizuje oscilatorni sistem. Pokažite da bi period tih oscilacija bio

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m r^3}{qQ}}\,.$$

Kolika mora biti masa m da bi bilo $T \simeq 1\text{s}$, ako je $r = \frac{1}{2}$ m? ($m \simeq 1{,}82\cdot 10^{-3}$kg).

1.19) Dve duži, svaka dužine L, ravnomerno su opterećene količinom opterećenja $+Q$. Duži su paralelne, na međusobnom rastojanju r. U tački A (sl.1.14) nalazi se opterećenje $+q$.



Sl. 1.14.

a) Naći silu koja deluje na opterećenje $+q$ (smatrati da je $r \ll L$).
b) Ako tačkasti objekat u tački A, pored toga što nosi opterećenje $+q$, ima i neku masu m, naći kružnu učestanost

linearnih oscilacija duž ose y u okolini tačke O.
c) Izračunati tu kružnu učestanost ako je: $q = 10^{-6}$C, $Q/L = 10^{-5}$C/m, $r = 10^{-1}$m i $m = 10^{-4}$kg.

Rešenje:

a) Neka je F_1 sila kojom gornja duž deluje na opterećenje, a F_2 sila kojom donja duž deluje na opterećenje. Mi znamo da je

$$F_1 = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{(\frac{r}{2}-y)\sqrt{4(\frac{r}{2}-y)^2+L^2}}$$ (videti zadatak 1.3)

$$F_2 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{Qq}{(\frac{r}{2}+y)\sqrt{4(\frac{r}{2}+y)^2+L^2}}$$

Ukupna sila je, dakle:

$$F = F_1 + F_2\,,$$

$$F = \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{(\frac{r}{2}+y)\sqrt{1+4(\frac{r}{2}+y)^2/L^2}} - \frac{1}{(\frac{r}{2}-y)\sqrt{1+4(\frac{r}{2}-y)^2/L^2}}\right\}$$

($\tau = Q/L$, linijska gustina opterećenja)
S obzirom da važi aproksimacija $r \ll L$, biće:

$$F \simeq \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{1}{\frac{r}{2}+y} - \frac{1}{\frac{r}{2}-y}\right\},$$

odakle je

$$F \simeq \frac{q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{2y}{(\frac{r}{2})^2-y^2}$$ odnosno,

$$F \simeq \frac{q\tau}{\pi\varepsilon_0}\,\frac{y}{(\frac{r}{2})^2-y^2}\,. \qquad (1)$$

b) Kada je $y^2 \ll (\frac{r}{2})^2$, možemo pisati, na osnovu relacije (1):

$$F \approx \frac{4q\tau}{\pi\varepsilon_0 r^2}\, y \,. \qquad (2)$$

Ako tačkasti objekat mase m može da se kreće duž ose y, on će pod dejstvom sile (2) izvoditi oscilacije oko tačke O. Jednačina kretanja će glasiti

$$m\ddot{y} + \frac{4q\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, y = 0 \,.$$

Odavde vidimo da će tražena kružna učestanost biti:

$$\omega = \sqrt{\frac{4q\tau}{\pi\varepsilon_0 r^2 m}} \,.$$

c)
$$\omega = 4\sqrt{\frac{10^{-6}\cdot 10^{-5}}{\frac{10^{-9}}{9}\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-4}}}\ \frac{1}{s} = 1{,}2\cdot 10^{3}\ \frac{1}{s} \,.$$

Analiza jedinica:

$$\left[\sqrt{\frac{C\cdot C/m}{\frac{F}{m}\cdot m^2\cdot kg}}\right] = \left[\sqrt{\frac{C^2}{F\cdot m^2\cdot kg}}\right] = \left[\sqrt{\frac{C^2}{\frac{C}{V}\cdot m^2\cdot kg}}\right] = \left[\sqrt{\frac{C\cdot J/C}{m^2\cdot kg}}\right] =$$

$$= \left[\sqrt{\frac{J}{m^2\cdot kg}}\right] = \left[\sqrt{\frac{kg\cdot m\cdot s^{-2}}{kg\cdot m}}\right] = \left[s^{-1}\right]$$

Pitanja i komentari. Izraz za silu (1) može se razviti u red tipa:

$$F = C_1 y + C_3 y^3 + C_5 y^5 + \ldots \qquad (3)$$

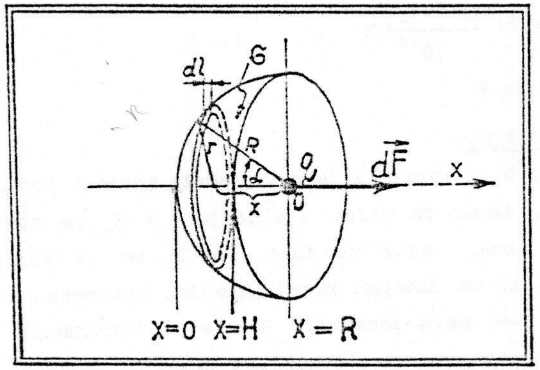
Ako je situacija takva da se oscilacije moraju opisivati sa prva dva člana ovog reda, kako biste onda postupili? Da li znate da rešavate odgovarajuću diferencijalnu jednačinu? Možda ćete biti prinuđeni da pogledate odgovarajuće udžbenike iz matematike, a možda će biti dovoljno i samo pogledati neku od zbirki diferencijalnih jednačina (mi možemo preporučiti poznati priručnik E. Kamkea: Diferencijalne jednačine, metode rešavanja i rešenja, koji se najčešće može lako naći u univerzitetskim bibliotekama). Inače, ponašanje sistema pod dejstvom sila tipa (2) student će sretati i analizirati ne jednom u toku studija fizike (u toku izučavanja kvantne mehanike, itd).

1.10) Kalota visine H ravnomerno opterećena količinom opterećenja Q, tako da je površinska gustina opterećenja σ konstantna veličina. Tačkasto opterećenje q nalazi se u tački O (s.1.15.) koja je i centar sfere, čiji je deo i posmatrana kalota.

a) Naći silu koja deluje na opterećenje q.

b) Izračunati tu silu ako je H = R (R je poluprečnik sfere), a $q = 1\ \mu C$ i $\sigma = 10^{-3}\ C/m^2$.

Rešenje:



Sl.1.15.

Možemo zamisliti da je kalota izdeljena na elementarne površine koje podsećaju na prsten oko x ose (videti sl.1.15). Jedna takva površina na udaljenosti x od opterećenja q, ustvari je kružnica ravnomerno opterećena količinom opterećena dQ,

$$dQ = \sigma dS = \sigma\cdot 2\pi r\cdot dl = \sigma\cdot 2\pi r\,\frac{dx}{\sin\alpha} \,.$$

Silu dF (usmerenu duž ose x) koja potiče od dejstva ove kružnice znamo da izračunamo na osnovu rezultata zadatka 1.8:

$$dF = \frac{q\,dQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{\left(\sqrt{x^2+r^2}\right)^3} = \frac{q\,dQ}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{R^3} \,,$$

$$dF = \frac{q\sigma 2\pi r}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{x}{R^3}\,\frac{dx}{\sin\alpha} = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0}\,\frac{2x\,dx}{R^2} \,.$$

Obeležimo: $t = x/R$ (R poluprečnik sfere). Tada je $dx/R = dt$, pa će biti:

$$F = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} 2tdt .$$

Ukupna sila F će biti:

$$F = \int_0^{H/R} \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} 2tdt = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} t^2 \Big|_0^{H/R} ,$$

$$F = \frac{q\sigma}{4\varepsilon_0} \frac{H^2}{R^2}$$

b)

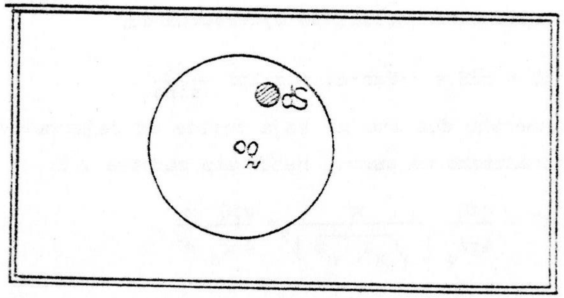
$$F = 9\pi \frac{10^{-6} \cdot 10^{-3}}{10^{-9}} N ,$$

$$F = 9\pi \text{ N} .$$

Pitanja i komentari .

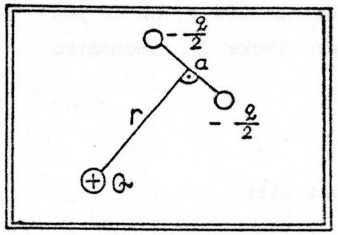
Za sve kalote, bilo kakav da je poluprečnik sfere i pod uslovom da je σ = const, izraz za silu, u slučaju $H = R$, ne zavisi od R. Razmisliti o tome, zašto je tako. Da li se to moglo unapred očekivati? Da li se zadatak komplikuje ako opterećenje q nije u centru sfere, već malo pomereno? Možete li izračunati promenu u sili kada se q samo neznatno udalji od tačke O?

Može se uzeti da je naelektrisana površina veća od polovine sfere ($H > R$). Smemo li tada još uvek da koristimo obrazac (1)? Možete li izvesti novu važeću formulu? Kako biste našli silu kada je naelektrisana skoro cela sfera (nedostaje samo jedan njen vrlo mali deo, kao što je skicirano na sl. 1.16.)?

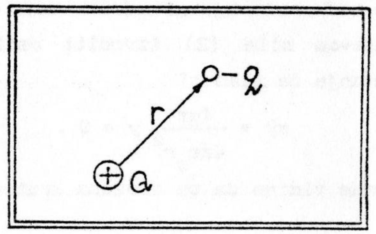


Sl.1.16

1.11) Uporediti sile privlačenja opterećenja predstavljenih na slikama 1.17 i 1.18 .



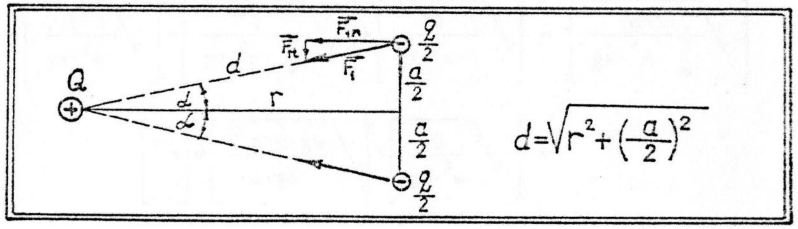
Sl.1.17.



Sl.1.18.

Rešenje:

Analizirajmo situaciju datu na slici 1.17 (sl.1.19)



Sl.1.19.

Intenzitet sile $\vec{F}_1$ iznosi

$$F_1 = \frac{Q \cdot \frac{q}{2}}{4\pi\varepsilon_0 d^2} .$$

Komponenta ove sile $\vec{F}_{1t}$ deluje tangencijalno na krutu vezu (dužine a) između dva opterećenja veličine $q/2$ i ne moramo je uračunavati u daljem postupku. Dakle, ukupna sila privlačenja iznosi $2F_1 \cos\alpha$, t.j.

$$F_{o-o} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon d^2} \cdot \frac{r}{d} . \qquad (1)$$

Što se tiče situacije sa sl.1.18, tu prosto imamo da primenimo Kulonov zakon. Za silu privlačenja ćemo dakle dobiti u ovom slučaju

$$F_{o-o} = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \,. \qquad (2)$$

Uporedimo li izraze (1) i (2), dobijamo

$$F_{o-o} = F\,\frac{r^3}{d^3}\,, \qquad (3)$$

što se može svesti na oblik

$$F_{o-o} = F\left[\frac{r}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}}\right] \qquad (4)$$

ili, uvodeci ugao α = arc tg(a/2r):

$$F_{o-o} = F\cdot\cos^3\alpha \,. \qquad (5)$$

Pitanja i komentari.

Pokažite da se, u aproksimaciji $a/2 \ll r$, može pisati

$$F_{o-o} \simeq \left[1 - \frac{3}{8}\frac{a^2}{r^2}\right]\cdot F \,.$$

Sila kojom opterecenje Q privlači dve polovine nekog negativnog opterećenja (dve polovine koje su na nekom rastojanju koje ne može potpuno zanemariti u odnosu na rastojanje do opterećenja Q!) manja je od sile koja bi delovala na celo to negativno opterecenje smešteno u jednoj tački, na istom rastojanju do Q. Zamislite sada da sistem od dva opterecenja počinje da rotira brzinom v oko opterećenja Q; ako su u pitanju dve kuglice, svaka mase m/2, odredite poluprečnik ravnotežne kružne putanje R (iz uslova da je centrifugalna sila, $F_c = \frac{mv^2}{r}$, jednaka sili F_{o-o}). Primetite da je razdvajanje opterećenja na dve polovine ekvivalentno pojavi dodatne radijalne sile koja ima isti smer kao i centrifugalna sila. U vezi sa tim, zanimljivo je pročitati u knjizi В.Н. Комаров, НОВАЯ ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АСТРОНОМИЯ, (strana 90) primedbe u vezi sa rešavanjem analognog zadatka u gravitacionom polju: metodom pulsacije moguće je, u principu, osloboditi vasionski brod od gravitacionog privlačenja nekog masivnog nebeskog tela.

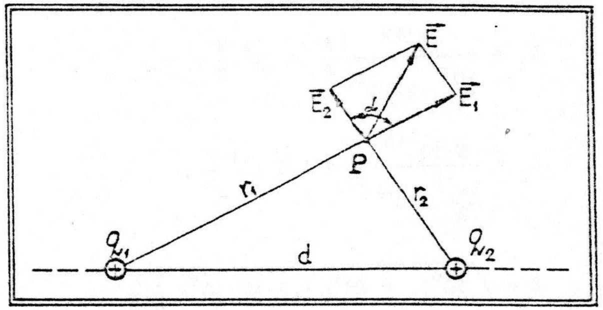
2. JAČINA ELEKTRIČNOG POLJA

2.1. Data su dva pozitivna tačkasta opterećenja, q_1 i q_2; Rastojanje među njima je d.

a) Naći vektor jačine električnog polja, $\vec{E}$, u tački P (sl. 2.1) koja je na udaljenosti r_1 od opterećenja q_1 i udaljenosti r_2 od q_2.

b) Izračunati E ako je $q_1 = 10^{-10}$C, $r_1 = 3\cdot 10^{-2}$m, $q_2 = 5\cdot 10^{-10}$C, $d = \sqrt{7}\cdot 10^{-2}$m.

Rešenje:



Sl.2.1.

a) Jačinu električnog polja u traženoj tački možemo naći koristeci princip superpozicije. Ako je $\vec{E}_1$ jačina električnog polja koje potiče od opterećenja q_1, a $\vec{E}_2$ polje koje potiče od q_2, biće

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2;$$

pri tome je:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\,, \qquad (1)$$

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\,.$$

Sa sl.2.1. vidimo da je

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}\,. \qquad (2)$$

Takođe je $\quad d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha$, t.j.

$$\cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}\,.$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{9\cdot 10^{-4} + 10^{-4} - 7\cdot 10^{-4}}{2\cdot 3\cdot 10^{-2}\cdot 10^{-2}} = \frac{3\cdot 10^{-4}}{6\cdot 10^{-4}} = \frac{1}{2}\,.$$

$$E_1 = \frac{10^{-10}}{\frac{10^{-9}}{9}\cdot 9\cdot 10^{-4}}\,\frac{V}{m} = 10^3\,\frac{V}{m}\,,$$

$$E_2 = \frac{5\cdot 10^{-10}}{\frac{10^{-9}}{9}\cdot 10^{-4}}\,\frac{V}{m} = 4,5\cdot 10^4\,\frac{V}{m}\,,$$

$$E = \sqrt{10^6(1 + 45^2) + 2\cdot 45\cdot 10^6\cdot \frac{1}{2}}\,\frac{V}{m}\,,$$

$$E = 10^3\sqrt{1 + 45 + 45^2}\,\frac{V}{m}\,,$$

$$E \simeq 4,55\cdot 10^4\,\frac{V}{m}\,.$$

Analiza jedinica: iz relacije (1) sledi:

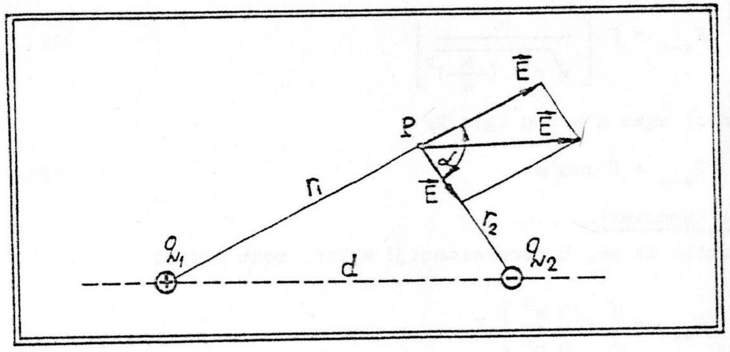
$$\left[\sqrt{\frac{C^2}{\frac{F^2}{m^2}\cdot m^4}}\right] = \left[\frac{C}{F\cdot m}\right] = \left[\frac{V}{m}\right].$$

2.2) Na rastojanju d od pozitivnog tačkastog opterećenja q_1 nalazi se negativno tačkasto opterećenje q_2.

a) Naći jačinu električnog polja $\vec{E}$ u tački P (sl.2.2.) ako su zadata rastojanja r_1 i r_2.

b) Izračunati E ako je $q_1 = 10^{-10}$C, $q_2 = 5\cdot 10^{-10}$C, $r_1 = 3\cdot 10^{-2}$m, $r_2 = 10^{-2}$m i $d = 2,65\cdot 10^{-2}$m.

Rešenje:



Sl.2.2.

a) Sa E_1 i E_2 označimo jačine električnih polja koja potiču od opterećenja q_1 i q_2 respektivno. Pri tome je

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2}\,,$$

$$E_2 = \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}\,,$$

Prema principu superpozicije, tražena jačina $\vec{E}$ je

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\,.$$

Vektor $\vec{E}$ je definisan ako odredimo intenzitet E i ugao α (sl.2.2.) Primenjujući kosinusnu teoremu, nalazimo

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2\cos\alpha}\ ,$$

$$\cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}\ .$$

b) $$\cos\alpha = \frac{7\cdot 10^{-4} - 9\cdot 10^{-4} - 10^{-4}}{2\cdot 3\cdot 10^{-4}} = -\frac{1}{2}\ .$$

$$E_1 = \frac{10^{-10}}{\frac{10^{-9}}{9}\cdot 9\cdot 10^{-4}}\ \frac{V}{m} = 10^3\ \frac{V}{m}\ ,$$

$$E_2 = \frac{5\cdot 10^{-10}}{\frac{10^{-9}}{9}\cdot 10^{-4}}\ \frac{V}{m} = 4,5\ 10^4\ \frac{V}{m}\ ,$$

$$E = \sqrt{10^6 + 45^2\cdot 10^6 - 2\cdot 10^6\cdot 45\cdot \frac{1}{2}}\ \frac{V}{m}\ ,$$

$$E = 10^3\cdot\sqrt{1 - 45 + 45^2}\ \frac{V}{m}\ ,$$

$$E \approx 4,45\cdot 10^4\ \frac{V}{m}\ .$$

2.3.) Iznad beskonačne homogeno naelektrisane ravni (površinska gustina opterećenja σ) nalazi se tačkasto opterećenje q. Na rastojanju r od tačkastog opterećenja nalazi se prava beskonačno naelektrisana nit (linijska gustina τ), koja zajedno sa opterećenjem q leži u ravni paralelnoj sa datom naelektrisanom ravni (sl.2.3.).

a) Odrediti rastojanje r tako da rezultantno električno polje $\vec{E}$ zaklapa ugao α sa ravni.

b) Naći intenzitet jačine električnog polja E pri tom rastojanju.

c) Izračunati r i E ako je τ = 3,14 10^{-8} C/m, σ = 10^{-8} C/m^2 i α = 45°.

Rešenje:

a) Jačinu električnog polja koja potiče od naelektrisane ravni nalazimo po formuli

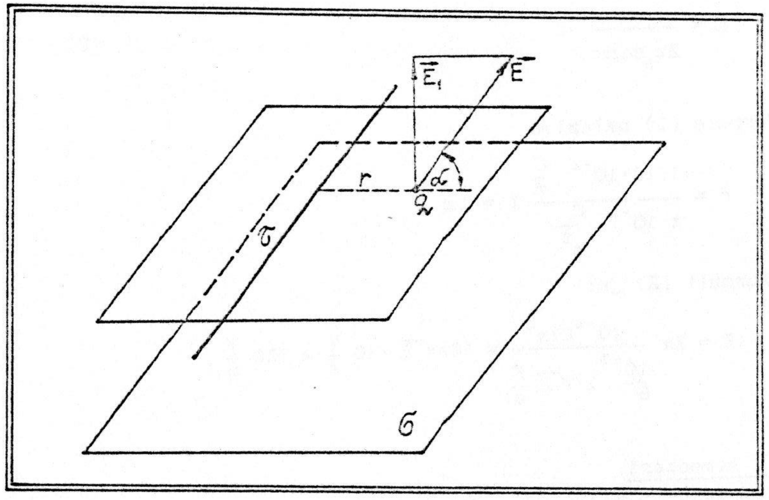
$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\ .$$

Naelektrisana nit daje oko sebe nehomogeno električno polje koje se određuje formulom

$$E_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\ .$$

Po principu superpozicije, ukupno električno polje određeno je vektorskim zbirom polja E_1 i E_2:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2\ .$$



Sl.2.3.

Vidimo da ćemo za nagib vektora $\vec{E}$ moći da pišemo (videti sl.2.3.)

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}{\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}}\ ,$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \pi r\,\frac{\sigma}{\tau}\ ,\ \text{odakle je}$$

$$r = \frac{\tau}{\pi\sigma}\,\mathrm{tg}\alpha \,. \qquad (1)$$

b) $$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}\right)^2}\ ;$$

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\pi^2 r^2}}\ ,$$

$$E = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sqrt{\sigma^2 + \frac{\tau^2}{\frac{\pi^2\tau^2}{\pi^2\sigma^2}\,\mathrm{tg}^2\alpha}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sqrt{1 + \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha}}\ ,$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \sin\alpha}\,. \qquad (2)$$

c) Iz formule (1) nalazimo

$$r = \frac{3{,}14\cdot 10^{-8}\ \frac{C}{m}}{\pi\cdot 10^{-8}\ \frac{C}{m^2}}\cdot 1 = 1\mathrm{m}\,.$$

Shodno formuli (2) je:

$$E = 2\pi\,\frac{10^{-8} C/m^2}{\frac{10^{-9}}{9}\ 1/\sqrt{2}\ \frac{F}{m}} = 18\pi\sqrt{2}\cdot 10\ \frac{V}{m} \approx 800\ \frac{V}{m}\,.$$

Pitanja i komentari.

U idealizovanom slučaju, kakav mi posmatramo, nebitno je rastojanje opterećenja q od naelektrisane ravni. Taj fakat je vidljiv u izrazu za polje E_1. Da li vam je očigledno da električno polje iznad beskonačne naelektrisane ravni mora biti homogeno? Možete li naći geometrijsko mesto tačaka u kojima je intenzitet rezultujuceg polja konstantan?

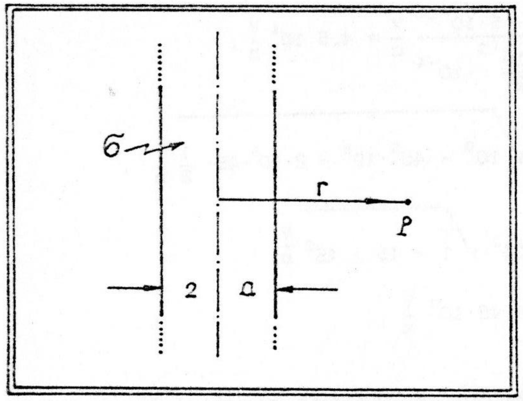
2.4) Dat je beskonačni cilindar poluprečnika a, ravnomerno opterećen površinskom gustinom opterećenja σ.

a) Naći jačinu električnog polja u tački P na rastojanju r od ose cilindra (sl.2.4.)

b) Kolika sila u tački P deluje na tačkasto opterećenje q, ako bi se ovo tamo nalazilo?

c) Izračunati tu silu ako je $r = 9a$, $q = 10^{-6}$C i $\sigma = 10^{-8}$ C/m^2 .

Rešenje:



Sl.2.4.

a) Izraz za jačinu električnog polja oko beskonačnog cilindra glasi (videti formulu 13.9. u udžbeniku)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r}\,,$$

gde je q_1 količina opterećenja po jedinici dužine cilindra. Pošto jedinici dužine cilindra odgovara površina $S_1 = 2\pi a$, bice $q_1 = \sigma\cdot S_1 = \sigma\cdot 2\pi a$, pa je

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\pi a\sigma}{r}\,, \quad \text{tj.}$$

$$E = \frac{\sigma a}{\varepsilon_0 r}\,.$$

b) $$F = qE\,,$$

$$F = \frac{q\sigma a}{\varepsilon_0 r}\ .$$

c) $$F = 4\pi\,\frac{10^{-6}\,\mathrm{C}\cdot 10^{-6}\,\mathrm{C/m}}{\frac{10^{-9}}{9}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\ 9a}\,a\ ,$$

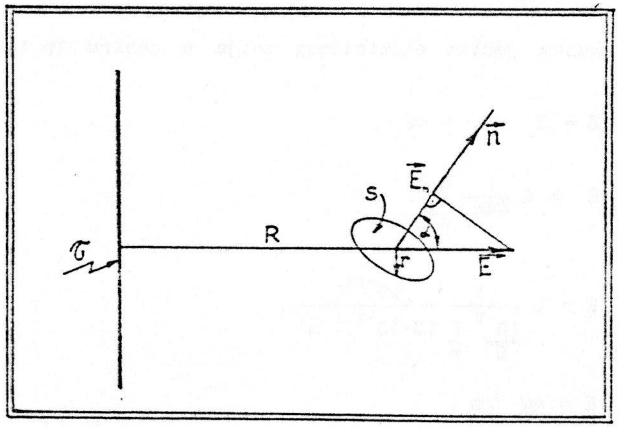
$$F = 4\pi\cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}\ .$$

2.5) Posmatrajmo električno polje koje potiče od tanke, vrlo duge, ravnomerno opterećene niti (opterećenje po jedinici dužine obeležavamo sa τ). Na rastojanju R od niti (sl.2.5.) zamislimo ravnu površinu S, poluprečnika r. Normala u centru te površine zaklapa ugao α sa vektorom jačine električnog polja u toj tački.

a) Naći fluks vektora jačine električnog polja kroz tu površinu, smatrajući da je $R \gg r$.

b) Izračunati taj fluks ako je $\alpha = 0$, $R = 18\cdot r$, $r = 10^{-2}\,\mathrm{m}$ i $\tau = 2\cdot 10^{-8}\ \mathrm{C/m}$.

Rešenje:



Sl.2.5.

a) Električno polje koje potiče od naelektrisane niti je dato izrazom

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\tau}{R}$$

(Videti formulu 13.9. u udžbeniku).

Ono je, dakle, nehomogeno pa bi smo morali u izračunavanju fluksa N poći od opšteg izraza

$$N = \int_S E_n\cdot dS\ .$$

Međutim, po uslovu zadatka, površina S je dovoljno mala, te električno polje možemo izračunati u centru te površine i smatrati da je ono homogeno u okvirima površine. No, tada je prosto:

$$N = E\cdot S\cdot\cos\alpha\ . \qquad (1)$$

Smenom (1) u (2) nalazimo

$$N = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\,\frac{\tau}{R}\,r^2\pi\cos\alpha\ ,$$

$$N = \frac{\tau\, r^2}{2\varepsilon_0 R}\,\cos\alpha\ . \qquad (3)$$

b) $$N = 2\pi\,\frac{2\cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\cdot 10^{-2}\cdot r}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}\cdot 18r}\ ,$$

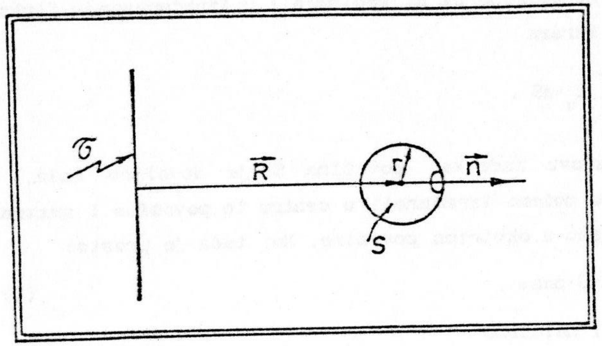
$$N = 2\pi\cdot 10^{-1}\ \mathrm{V\cdot m}\ .$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}\,\mathrm{m}}{\mathrm{F/m}}\right] = \left[\frac{\mathrm{C\cdot m}}{\mathrm{F}}\right]\ \left[\frac{\mathrm{C\cdot m}}{\mathrm{C\cdot V^{-1}}}\right] = \left[\mathrm{V\cdot m}\right].$$

Pitanja i komentari. Iskoristite ovaj zadatak da ponovite teoremu Gausa-Ostrogradskog i osnovne posledice te teoreme. Obraditi za domaći zadatak ovakav slučaj (sl.2.6.).

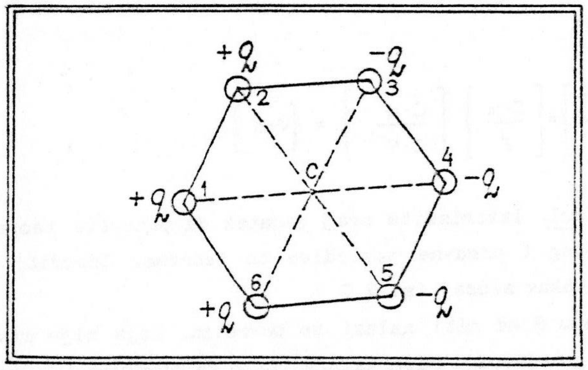
Na rastojanju R od niti nalazi se površina, koja nije ravna nego sfera, kojoj nedostaje mala kalota, tako da površina S nije zatvorena; ustvari ona ima otvor kružnog oblika (obeležimo poluprečnik tog kruga sa a), a normala $\vec{n}$ na toj kružnici poklapa se po pravcu sa potegom $\vec{R}$. Nađite fluks kroz površinu S u slučaju a«R. Ima li rešenje tog zadatka veze sa našom formulom (3)?



Sl.2.6.

2.6) a) Naći jačinu električnog polja u centru šestougaonika stranice a ako su opterećenja q, tri pozitivna i tri negativna, raspoređena po temenima kao što je prikazano na sl. 2.7.

b) Izračunati jačinu električnog polja ako je $q = 10^{-12}$C i $a = 3\cdot 10^{-2}$m.



Sl.2.7.

Rešenje:

a) Sa E_1 označimo intenzitet vektora jačine električnog polja koje u centru C stvara jedno pozitivno opterećenje q u temenu 1.

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}.$$

Slika je simetrična u odnosu na osu x, te će rezultujuće polje biti usmereno duž ove ose. Opterećenje u temenu 3 daje komponentu E_{3x} koja je jednaka

$$E_{3x} = E_1 \cos 60° = \frac{1}{2}E_1.$$

Jasno je da će taj rezultat važiti i za opterećenje u temenu 5:

$$E_{5x} = E_{3x} = \frac{1}{2}E_1.$$

Tri negativna opterećenja, zajedno, daju polje jačine

$$E_- = E_1 + \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_1 = 2E_1.$$

Upravo toliki doprinos je i od svih pozitivnih opterećenja:

$$E_+ = 2E_1.$$

Zato je ukupna jačina električnog polja u centru šestougaonika jednaka

$$E = E_- + E_+ = 4E_1,$$

$$E = 4\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{a^2}.$$

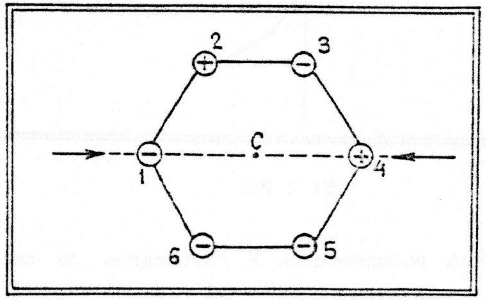
b)

$$E = 4\frac{1}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{F}{m}}\frac{10^{-12}C}{(3\cdot 10^{-2})^2 m^2},$$

$$E = 40 \text{ V/m}.$$

Pitanja i komentari. Napravite drugačiji raspored pozitivnih i negativnih opterećenja i nađite novo rešenje za jačinu električnog polja. Koliko takvih kombinacija postoji? Posebno se zadržite na ovom slučaju (sl.2.8.).

Šta biva ako se šestougaonik malo deformiše, na primer sabije duž pravca koji spaja opterećenja 1 i 4? (sl.2.8.). Da li i tada polje u centru zadržava nultu vrednost? Možete li izračunati jačinu tog polja? Povezati ovo sa elementarnim tretmanom piezoelektričkog efekta (videti u udžbeniku izlaganje o piezoelektricitetu).



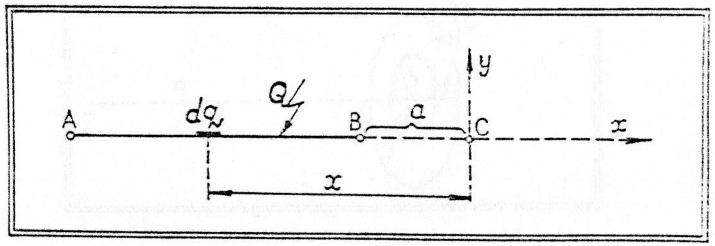
Sl.2.8.

2.7.) Duž AB ravnomerno je opterećena količinom opterećenja Q.

a) U produžetku duži, na rastojanju a od tačke B u tački C (sl.2.9.) naći jačinu električnog polja.

b) Izračunati jačunu električnog polja ako je: $Q = 10^{-9}C$, $AB = 2\cdot10^{-2}m$ i $a = 10^{-2}m$.

Rešenje:



Sl.2.9.

$$E = \int dE = \int_{-a-l}^{-a} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2} \qquad (l = \overline{AB};\ dq = \frac{Q}{l}\,dx)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-a-l}^{-a}\cdot\frac{Q}{l},$$

$$E = \frac{Q/l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{-a-l} - \frac{1}{-a}\right) = \frac{Q/l}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right),$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{a(a+l)}\ . \tag{1}$$

b)

$$E = \frac{10^{-9}C}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{F}{m}}\ \frac{1}{10^{-2}m(10^{-2}m + 2\cdot10^{-2}m)},$$

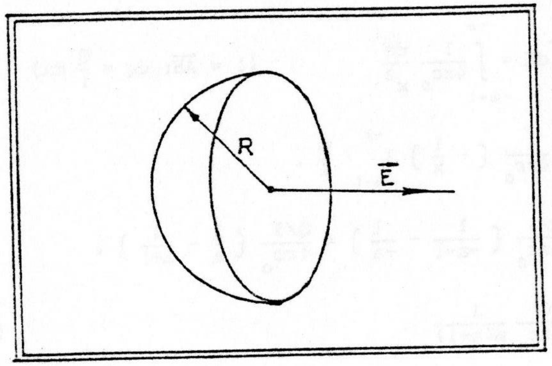
$$E = 3\cdot10^{4}\ V/m\ .$$

<u>Pitanja i komentari</u>. Kad se u nekom zadatku dobije rešenje, poželjno je videti je li ono logično na prvi pogled, da li je u skladu sa nekim najjednostavnijim faktima. Na primer, u našem zadatku bi moralo biti tačno sledeće: ako je $a \ll l$, izraz za jačinu električnog polja mora da se podudara sa izrazom za jačinu električnog polja oko tačkastog opterećenja. Je li to slučaj sa formulom (1) ? Možete li iskoristiti formulu (1) da nađete rešenje u slučaju $l\to\infty$? Kakvu proceduru moramo primeniti (ako postupite formalno i nebrižljivo učiniće vam se da je $E_{(\infty)} = 0!$). Na kom rastojanju od tačke C treba postaviti vertikalnu opterećenu duž da bi smo dobili električno polje iste jačine? U zadatku 1.6. tražili smo silu za konfiguraciju koja se tretira u ovom zadatku. Je li rezultat koji je tamo dobijen u saglasnosti sa ovom analizom?

2.8) Posmatrajmo ravnomerno naelektrisanu polusferu. Označimo sa σ površinsku gustinu opterećenja.

a) Naći jačinu električnog polja u centru polusfere, (sl.2.10.).

b) Izračunati jačinu električnog polja ako je $\sigma = 10^{-9}C/m^2$.



Sl. 2.10.

Rešenje:

a) Postupkom koji je sličan onom u zadatku 1.10 možemo dobiti rezultat

$$E = \frac{\sigma}{4\varepsilon_0} \qquad (1)$$

b)

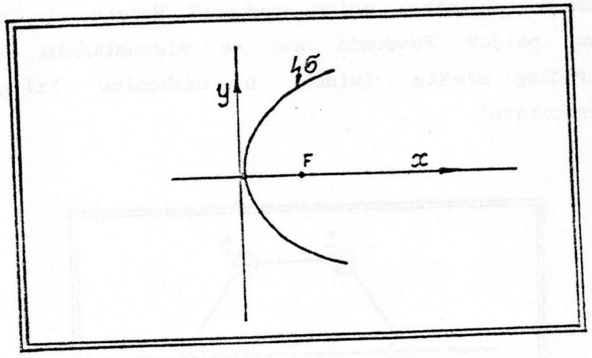
$$E = \pi \frac{10^{-9}\mathrm{C/m^2}}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}}$$

$$E = 9\pi \ \mathrm{V/m}\ .$$

Pitanja i komentari. Uporediti izraz (1) sa formulom za jačinu električnog polja u tački na rastojanju R od centra naelektrisanog diska čija je površina jednaka površini polusfere. Koje je polje jače (pogledati zadatak 2.9.)? Jeste li čekivali takav odgovor? Koji su razlozi? Izraz (1) ne zavisi od R, već samo od σ. Kad $R\to\infty$, dobijamo rezultat koji je tek 1/2 od jačine polja oko beskonačne ravni. Zašto?

Pokušajte posle ovog zadatka, da nađete polje u žiži obrtnog paraboloida (sl.2.11.)

$$y^2 = 2px$$



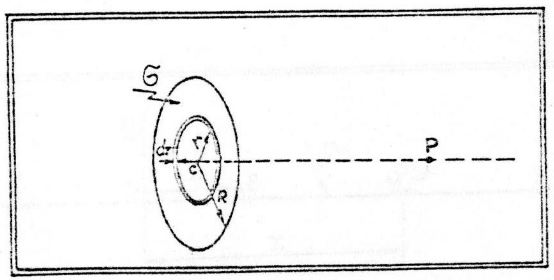
Sl.2.11.

2.9. Okrugla ploča poluprečnika R ravnomerno je naelektrisana (površinska gustina opterećenja je σ).

a) Kolika je jačina električnog polja u tački P (sl.2.12.) koja se nalazi na normali kroz centar ploče, na udaljenosti L?

b) Izračunati jačinu električnog polja ako je $\sigma = 10^{-9}\mathrm{C/m^2}$ i $R/L=\sqrt{3}$.

Rešenje:



Sl.2.12.

a) Zamislimo da smo podelili ploču na beskonačno tanke prstenove koji se koncentrično ređaju od tačke C do periferije ploče; jedan takav prsten, debljine dr, na rastojanjun r od centra C, prikazan je na sl. 2.12. Površina prstena $dS = 2\pi r dr$. Njemu pripada opterećenje $dq = \sigma dS = 2\pi\sigma r dr$. Na osnovu rezultata zadatka 1.8. znamo da je jačina električnog polja koje potiče od prstena data izrazom:

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0} \frac{L}{(L^2 + r^2)^{3/2}} .$$

Integracijom dobijamo:

$$E = \int dE = \frac{L}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi\sigma r dr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} ,$$

$$E = \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} .$$

Ovaj integral se rešava smenom $L^2 + r^2 = t$ pri čemu se ustanovljava da je

$$\int \frac{r dr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} = - \frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2}} .$$

Zato je

$$E = - \frac{\sigma L}{2\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{L^2 + r^2}} \Bigg|_0^R ,$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2}}} \right]$$

b)
$$E = 2\pi \frac{10^{-9}\ C/m^2}{\frac{10^{-9}}{9}\ \frac{F}{m}} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1+3}} \right] ,$$

$$E = 18\pi \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{V}{m} , \qquad E = 9\pi\ V/m .$$

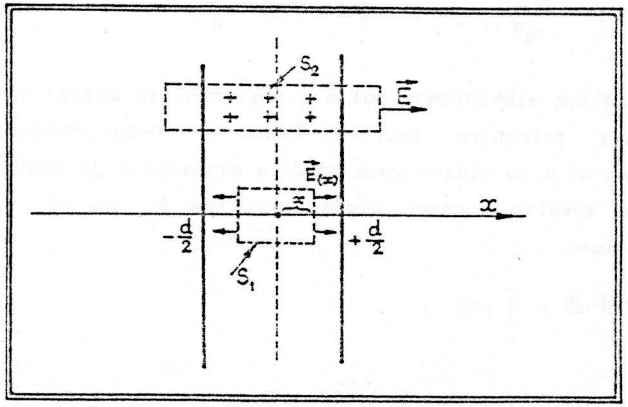
<u>Pitanja i komentari</u>. Na osnovu relacije (1) skicirajte zavisnost $E = f(R/L)$. Šta je fizički smisao asimptotske vrednosti $E_a = \lim_{R/L \to \infty} E$? U aproksimaciji $(R/L)^2 \ll 1$ možemo razviti u red faktor $1/\sqrt{1 + R^2/L^2}$; šta daje takva procedura i kakvu fizičku situaciju ona opisuje? Kako izgleda prvi član koji daje korekciju izraza za polje blizu beskonačne naelektrisane ravni?

2.10.) Ravni dielektrični sloj (dielektrična konstanta je ε) debljine d (ostale dve dimenzije su neograničeno velike) homogeno je naelektrisan (zapreminska gustina opterećenja je ρ).

a) Skicirati kako se menja jačina električnog polja u pojedinim tačkama duž x ose (sl. 2.13.)

b) Izračunati jačinu električnog polja u tačkama van sloja ako je $d = 2\cdot 10^{-2}$ m, $\rho = 10^{-5}$ C/m^3.

Rešenje:



Sl. 2.13.

a) Da bismo odredili kolika je jačina električnog polja na rastojanju x od središnje ravni sloja, primenićemo teoremu Gausa-Ostrogradskog na površinu S_1 (označenu na sl. 2.13.) koja je u stvari paralelopiped (čija je visina 2x, površina baze S_0, a zapremina V_1). Dakle:

$$\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{V_1} \rho dV .$$

Zbog simetrije sistema, električno polje ne može imati komponentu u nekom pravcu koji se ne poklapa sa x osom. Zato je fluks vektora $\vec{D}$ kroz omotač paralelopipeda jednak nuli. Prema tome je

$$\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = 2\varepsilon_0\varepsilon\, E(x)\, S_0 .$$

Pošto je $V_1 = S_0\cdot 2x$, a $\rho = \text{const}$, biće

$$\int_{V_1} \rho dV = \rho\cdot V_1 = \rho\, S_0\cdot 2x .$$

Dakle, teorema Gausa-Ostrogradskog daje

$$2\varepsilon_0\varepsilon E(x)\, S_0 = 2\rho S_0 x ,$$

$$E(x) = \frac{\rho\, x}{\varepsilon_0\varepsilon} \qquad \left(-\frac{d}{2} \le x \le +\frac{d}{2}\right) \qquad (1)$$

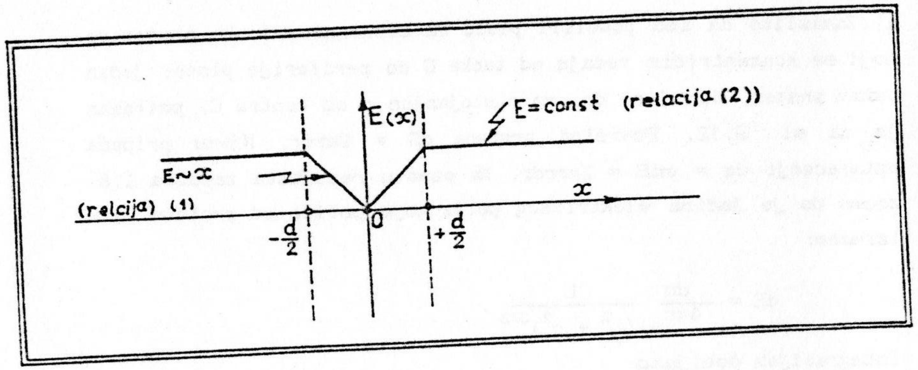
Šta je sa jačinom električnog polja u prostoru van sloja? Odgovor dobijamo ako primenimo teoremu Gausa - Ostrogradskog na paralelopiped čija je visina veća od d, a simetrično je postavljen u odnosu na središnju ravan sloja (površina S_2, na sl. 2.13.). Dobijamo, redom:

$$\oint_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{V} \rho dV ,$$

$$2\varepsilon_0 E S_0 = \rho\, S_0\cdot d ,$$

$$E = \frac{\rho d}{2\varepsilon_0} \qquad \left(|x| > \frac{d}{2}\right) \qquad (2)$$

Sad možemo da prikažemo, na osnovu relacija (1) i (2), kvalitativni izgled zavisnosti jačine električnog polja od koordinate x:



Sl. 2.14.

b)

$$E = 2\pi\,\frac{10^{-5}\ \frac{C}{m^3}\cdot 2\cdot 10^{-2} m}{\frac{10^{-9}}{9}\ \frac{F}{m}} ,$$

$$E = 36\pi\cdot 10^{2}\ V/m ,$$

$$E = 1{,}13\cdot 10^{4}\ V/m .$$

Pitanja i komentari. Da li ste, bez izvođenja formula, mogli da pretpostavite da će električno polje van sloja biti homogeno? Koji su to argumenti? Kao što možete primetiti upoređujući relacije (1) i (2), $E\left(\frac{\alpha}{2}\right) \ne E$: na granici sloj - vakuum električno polje je diskontinualno. Da li ste mogli naći izraz za E primenjujući granične uslove? (Pročitajte u udžbeniku §41. Vektor električnog pomeraja.)

Pokušajte da rešite zadatak ovog tipa, ali za cilindričnu i sfernu geometriju. Koji su to novi momenti ? U čemu su razlike?

2.11. Metalna sfera poluprečnika r_1 pozitivno je naelektrisana količinom opterećenja q_1. Oko nje, koncentrično postavljena, nalazi se sfera poluprečnika r_2 i ona nosi negativno opterećenje q_2.

a) Naći E_a jačinu električnog polja na rastojanju a od centra O sistema, (sl.2.15.), ako je $r_1 < a < r_2$.

b). Naći E_b, jačinu električnog polja na rastojanju b od centra O sistema, ako je $r_2 < b$.

c) Izračunati E_a i E_b ako je: $a = 10^{-1}$m, $b = 2\cdot 10^{-1}$m, $q_1 = 10^{-9}$C i $q_2 = 5\cdot 10^{-10}$C.

Rešenje:

a) Primenimo teoremu Gausa - Ostrogradskog za zamišljenu sferu poluprečnika a (ta površina je na sl. 2.15. označena sa S_1):

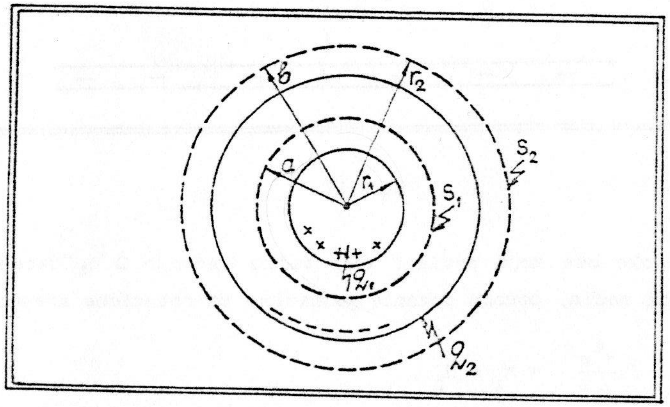
$$\oint_{S_1} \vec{D}\, d\vec{S} = q ,$$

$$\varepsilon_0 \oint E_a dS = q_1 .$$

Odavde je:

$$E_a = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S_1} ,$$

$$E_a = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} . \qquad (1)$$



Sl. 2.15.

Ako teoremu Gausa - Ostrogradskog primenimo na površinu S_2 (sl.2.15.) koja je sfera poluprečnika b, dobijamo:

$$\oint_{S_2} \vec{D}\, d\vec{S} = q ,$$

$$\varepsilon_0 \oint_{S_2} E_b dS = q_1 - q_2$$

Odavde je :

$$E_b = \frac{q_1 - q_2}{\varepsilon_0 S_2} ,$$

$$E_b = \frac{q_1 - q_2}{4\pi \varepsilon_0 b^2} .$$

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_\tau \varepsilon E d\tau$$

c)
$$E_a = \frac{1}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{F}{m}} \frac{10^{-9}\,C}{(10^{-1}m)^2} = 900\ V/m .$$

$$E_b = \frac{1}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{F}{m}} \frac{10^{-9}C - 5\cdot 10^{-10}C}{(2\cdot 10^{-1}m)^2} ,$$

$$E_b = \frac{9}{4}\cdot 100\ (1 - \frac{1}{2})\ \frac{V}{m} ,$$

$$E_b = \frac{900}{8}\ V/m = 112,5\ V/m .$$

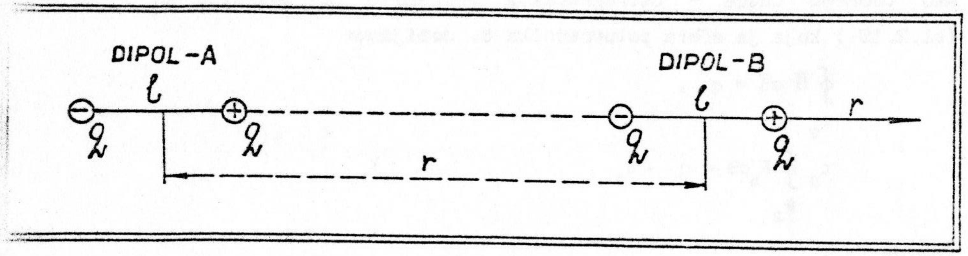
2.12.) Naći silu kojom molekul vode deluje na drugi takav molekul na udaljenosti r. a) Posmatrati onaj međusobni položaj koji nam izgleda najjednostavniji.

b) Izračunati tu silu ako je $r = \sqrt{3}\cdot 10^{-7}$ m.

Rešenje:

a) Dipol A stvara na mestu dipola B električno polje čija je jačina

$$E_r = \frac{p}{2\pi\varepsilon_0 r^3} , \qquad (1)$$



Sl. 2.16.

gde je p dipolni moment molekula (videti formulu 25.5. u udžbeniku). U ovakvom nehomogenom polju nalazi se dipol B. Na njega će (videti formulu 15.5. u udžbeniku) delovati sila

$$F_r = p\frac{dE_r}{dr},$$

$$F_r = p\frac{3}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^4},$$

$$F_r = \frac{12}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p^2}{r^4}.$$

b) $$F_r = \frac{12}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{F}{m}}\frac{(3,85\cdot10^{-28}Cm)^2}{(\sqrt{3}\cdot10^{-7}m)^4}$$

(u priručnicima se može naći da je dipolni momenat molekula vode $p = 3,85\cdot10^{-28}Cm$)

$$F_r = 12\cdot(3,85)^2\cdot10^{9+28-56}N,$$

$$F_r = 1,78\cdot10^{-17}N.$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{C^2m^2}{\frac{F}{m}\cdot m^4}\right] = \left[\frac{C^2}{F\cdot m}\right] = \left[\frac{C^2}{\frac{C}{V}\cdot m}\right] = \left[\frac{J}{m}\right] = \left[\frac{N\cdot m}{m}\right] = [N]$$

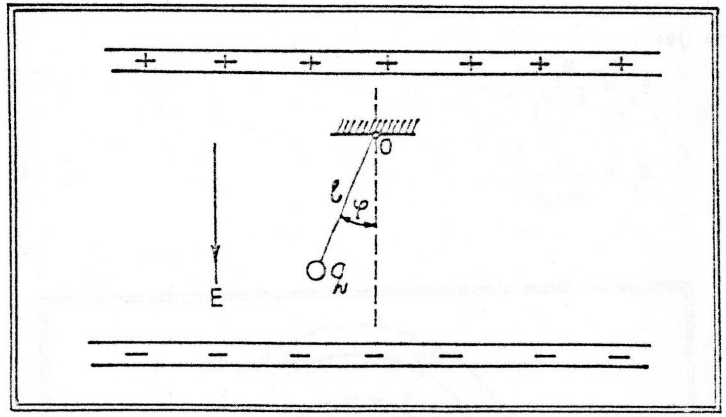
Pitanja i komentari. Da li se zadatak bitno menja ako uzmemo da je dipol B postavljen poprečno na osu r ili je, čak, u proizvoljnom položaju? Možete li proceniti dimenzije molekula vode? Je li ta dimenzija mnogo manja od rastojanja r i kakve to veze ima sa konkretnošću primene formula (1) i (2)?

2.13.) Mala kuglica mase m obešena o nit dužine l čini matematičko klatno koje se nalazi u homogenom električnom polju intenziteta E (sl. 2.17.). Kuglica je naelektrisana (količina opterećenja na njoj je q).

a) Kolika je kružna učestanost malih oscilacija tog klatna?

b) Izračunati tu kružnu učestanost ako je $qE = 0,1mg$ i $l = 9,81\cdot10^{-2}m$.

Rešenje:



Sl.2.17.

Kretanje oko ose koja prolazi kroz tačku vešanja O opisaćemo na uobičajeni način, pomoću poznate jednačine za rotaciono kretanje,

$$J\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_1 + M_2,$$

koja određuje ugao φ u pojedinim trenucima vremena. Momenat inercije našeg sistema je $J = ml^2$. Dve sile deluju na kuglicu: Sila zemljine teže F_G i električna sila F_E . Momenti tih sila su:

$$M_1 = -F_G l \sin\varphi \ ,$$

$$M_2 = -F_E l \sin\varphi \ .$$

Za male oscilacije kao i obično stavljamo $\sin\varphi \simeq \varphi$, pa je

$$ml^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\ (F_G + F_E)\ l\varphi \ ,$$

odnosno:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{F_G + F_E}{ml}\ \varphi = 0 \ .$$

Kao što je poznato, jednačina ovog oblika opisuje klaćenje s kružnom učestanošću

$$\Omega = \sqrt{\frac{F_G + F_E}{ml}} \ .$$

Pošto je $F_G = mg$ i $F_E = qE$, imamo definitivno

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{qE}{ml}} \ ,$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sqrt{1 + \frac{qE}{mg}} \ .$$

b)

$$\Omega = \sqrt{\frac{9{,}81\ \mathrm{ms}^{-2}}{9{,}81\cdot 10^{-2}\mathrm{m}}}\ \sqrt{1 + 0{,}1} \ ,$$

$$\Omega \simeq (1 + \tfrac{1}{2}\cdot 0{,}1)\cdot 10^1\ \mathrm{s}^{-1} \ ,$$

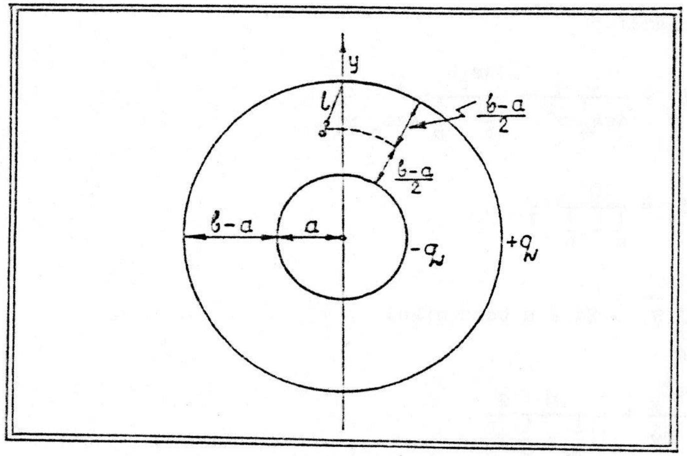
$$\Omega \simeq 10{,}5\ \frac{1}{\mathrm{s}} \ .$$

Pitanja i komentari. Opterećenje koje se oscilatorno kreće zrači elektromagnetske talase. U elementarnim zadacima kao što je naš, taj efekat zanemarujemo (zašto?). Možete li definisati neki postupak kojim je ipak moguće izvršiti korekciju na zračenje?

Pročitajte o klasičnom tretmanu disperzije svetlosti. Pokušajte i sami da sastavite neki zadatak sa idejom koju smo ovde koristili (na primer, analizirajte male oscilacije u polju tačkastog opterećenja, itd.).

2.14.) U električnom polju sfernog kondenzatora nalazi se dipol vezan tankom niti dužine l za spoljašnju oblogu (sl.2.18.). Na taj način, dipol može da izvodi oscilacije male amplitude. Tačka vešanja O je tako izabrana da se u ravnotežnom položaju klatna poklapaju pravci sile zemljine teže i električne sile na dipol. Pretpostavimo da je izmerena kružna učestanost Ω oscilacija klatna pri naponu U na kondenzatoru.

a) Odrediti dipolni moment dipola (klaćenje je u sredini zazora između obloga)



Sl. 2.18.

Napomena: Smatrati da je poznata masa m dipola.

Rešenje:

Prema rezultatu zadatka (2.13.), znamo da je

$$\Omega = \omega\sqrt{1+\frac{F_D}{F_G}},$$

gde je $\omega = \sqrt{g/l}$, $F_G = -mg$ (m - masa dipola), F_D - sila koja deluje na dipol u posmatranom električnom polju sfernog kondenzatora. Odavde je

$$F_D = -mg\left[\frac{\Omega^2}{\omega^2}-1\right].$$

Izraz za silu F_D (dipol u nehomegenom polju) ima oblik (videti formulu 15.5 u Udžbeniku)

$$F_D = p\frac{dE_y}{dy}, \qquad (1)$$

gde je p traženi dipolni moment, a E_y jačina električnog polja (y - osa je vertikalna osa, označena na sl.2.18). Pošto je za sferni kondenzator

$$E_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{y^2} = \frac{4\pi\varepsilon_0 U}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{y^2},$$

$$E_y = \frac{U}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\cdot\frac{1}{y^2},$$

(Formula 13.8. i 24.2 u Udžbeniku)

imamo da je:

$$\frac{dE_y}{dy} = -\frac{U}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\cdot\frac{2}{y^3}.$$

Iz relacije (1) tada nalazimo:

$$-p\frac{U}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}\cdot\frac{2}{y^3} = -mg\left[\frac{Q^2}{\omega^2}-1\right],$$

$$p = \frac{1}{2}y^3\frac{mg}{U}\left[\frac{Q^2}{\omega^2}-1\right]\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right].$$

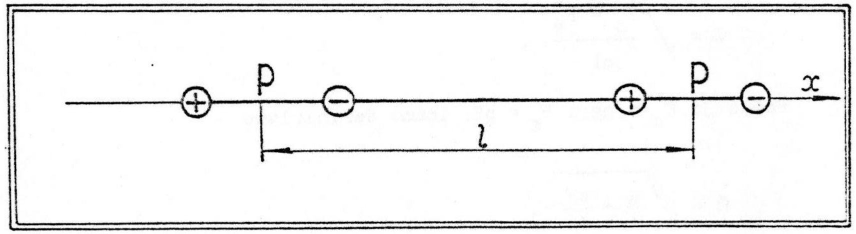
Po uslovu zadatka je y = a + 1/2 (b - a) = 1/2 (a + b), pa imamo definitivno:

$$p = \frac{1}{16}\left[a+b\right]^3\left[\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right]\frac{mg}{U}\left[\frac{Q^2}{\omega^2}-1\right]$$

2.15. Atom jedne supstancije može se približno predstaviti kao dipol odredenog dipolnog momenta p.

a) Naci silu F interakcije dva takva atoma u dispoziciji kao na sl. 2.19.

b) Izračunati F ako je $p = 0,40\cdot 10^{-30}$ Cm (ugljen monoksid) i $l = 1,71\cdot 10^{-9}$m.



Sl.2.19.

Rešenje:

a) Intenzitet sile koju "oseca" dipol u stranom električnom polju jačine E dat je izrazom (videti Udžbenik, relacija 15.5 na strani 33).

$$F = p\frac{dE}{dx}. \qquad (1)$$

S druge strane, električno polje E potiče od onog drugog dipola, te je stoga dato izrazom

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 x^3}\sqrt{3\cos^2\alpha + 1}.$$

(Videti, Udžbenik, relacija 25.7 str.54). Ovde za $\cos\alpha$ treba uzeti vrednost 1 ($\alpha = 0^\circ$), te je ustvari

$$E = \frac{2p}{4\pi\varepsilon_0 x^3} \qquad (2)$$

Izvodeći operacije naznačene u (1), dobijamo

$$F = 2p^2 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x^3} \right)\Big|_{x=l} = \frac{2p^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3}{x^4}\Big|_{x=l} ,$$

$$F = \frac{6p^2}{4\pi\varepsilon_0 l^4} .$$

(l - rastojanje dva dipola.)

b)
$$F = \frac{6\cdot(0,4)^2\cdot 10^{-60}\ C^2 m^2}{\frac{10^{-9}}{9}\ \frac{F}{m}\cdot(1,71)^4 (10^{-9})^4\ m^4} ,$$

$$F = \frac{54\cdot 0,16}{8,64}\ 10^{-60+9+36} N ,$$

$$F = 10^{-15}\ N . \qquad (3)$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{C^2 m^2}{\frac{F}{m}\cdot m^4}\right] = \left[\frac{C^2}{F\cdot m}\right] = \left[\frac{J}{m}\right] = \left[\frac{N\cdot m}{m}\right] = [N]$$

Pitanja i komentari.

Koji smer ima sila čiji smo intenzitet izračunali (rezultat (3)? Ako odmah ne vidite odgovor, još jednom proučite §15 - Dipol u električnom polju (strana 37. u Udžbeniku). Pokušajte da sami sastavite sličan zadatak, ili da drugi dipol leži van ose prvog dipola. U čemu je dodatna komplikacija?

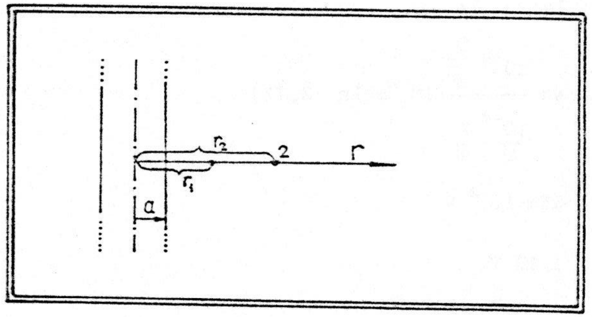
3. RAZLIKA POTENCIJALA

3.1. Beskonačno pravi, kružni cilindar pozitivno je naelektrisan površinskom gustinom opterećenja σ. Cilindar ima poluprečnik a.

a) Naći potencijalnu razliku između tačaka 1 i 2 (sl. 3.1) u električnom polju tog cilindra.

b) Izračunati razliku potencijala ako je $\sigma = 10^{-9} C/m^2$, $a = 10^{-2} m$ i $r_2/r_1 \approx 2,71$.

Rešenje:



Sl.3.1.

a) Na rastojanju r ($r > a$) od ose cilindra, električno polje ima oblik

$$E(r) = \frac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 r} ,$$

(videti u Udžbeniku, formula 13.9). q_1 je količina opterećenja po jedinici dužine cilindra, te je zato:

$$q_1 = \sigma\cdot 2\pi a\cdot 1 .$$

Na taj način je

$$E(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} 2\pi a\sigma \frac{1}{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{a}{r} .$$

Sada ćemo izračunati traženu razliku potencijala po definiciji:

$$U_{12} = \int_1^2 E_r dr ,$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{a}{r} dr ,$$

$$= \frac{\sigma}{\varepsilon_0} a \ln r \Big|_{r_1}^{r_2} ,$$

$$U_{12} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} a \ln \frac{r_2}{r_1} .$$

b)

$$U_{12} = 4\pi \frac{10^{-9} \frac{C}{m^2}}{\frac{10^{-9}}{9} \frac{F}{m}} \cdot 10^{-2} m \ln (2,71) ,$$

$$U_{12} \simeq 36\pi \cdot 10^{-2} \text{ V} ,$$

$$U_{12} \simeq 1,13 \text{ V} .$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{\frac{C}{m^2} \cdot m}{\frac{F}{m}} \right] = \left[\frac{C}{F} \right] = [V] .$$

Pitanja i komentari. Opterećenje na cilindru se može zadati precizirajući kolika je površinska gustina opterećenja ili na drugi način, kolika je količina opterećenja po jedinici dužine cilindra. Ne treba praviti omaške i zamene ove dve fizičke veličine. Njihova veza je data relacijom (1).

Iz relacije (2) vidimo da napon U_{12} zavisi od odnosa r_2/r_1,

te nije bitno znati r_1 i r_2 posebno da bi se izračunao napon. Da li se tu radi o nekoj opštoj osobini elektrostatičkog polja ili je samo takav konkretan slučaj u ovom zadatku? Dokumentujte odgovor.

3.2.) Elektron, čija je početna brzina v_0, uleće u homogeno električno polje i kreće se uz linije sile. Pošto pređe put koji odgovara potencijalnoj razlici U, elektron ima energiju E.

a) Naći U, ako su v_0 i E poznate veličine.

b) izračunati U ako je $v_0 = 10^6$ m/s i $E = 9,1 \cdot 10^{-19}$ J.

Rešenje:

a)

$$E = eU + \frac{1}{2} m v_0^2 , \qquad (1)$$

$$U = \frac{E - \frac{1}{2} m v_0^2}{e} .$$

b)

$$U = \frac{9,1\cdot 10^{-19} J - \frac{1}{2} \cdot 9,1\cdot 10^{-31} kg \cdot 10^{12} m^2 s^{-2}}{1,6\cdot 10^{-19} C} ,$$

$$U = \frac{(9,1\cdot 10^{-19} - 4,55\cdot 10^{-19})\ J}{1,6\cdot 10^{-19} C} ,$$

$$U = \frac{\frac{1}{2} \cdot 9,1\cdot 10^{-19}}{1,6\cdot 10^{-19}} \text{ V} ,$$

$$U = \frac{9,1}{3,2} \text{ V} = 2,84 \text{ V} .$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right] = [J] \quad ; \quad \left[\frac{J}{C} \right] = [V] .$$

Pitanja i komentari. Smemo li upotrebiti relaciju (1) i za vrlo velike brzine elektrona? Elektron se ubrzava u električnom polju. Da nije, možda, na kraju puta u električnom polju elektron već stekao toliku brzinu da počinju da deluju relativistički efekti? Proverite! Posmatrajte i ovaj slučaj: Proton uleće u električno polje na taj način da ga polje postepeno koči. Koliku najmanju razliku potencijala mora proći proton da bismo na kraju njegovog puta mogli primenjivati nerelativističke formule (početni impuls protona je poznat; uzeti da su brzine reda veličine $\frac{1}{10}\cdot 3\cdot 10^{8}$ m/s već nerelativističke).

U ovim zadacima se susrećemo sa ubrzanim kretanjem naelektrisanih čestica. U principu, treba imati u vidu i zračenje pod tim okolnostima. Procenite relevantnost efekata zračenja pod uslovima našeg zadatka.

3.3.) Dva pozitivna tačkasta opterećenja q_1 i q_2, nalaze se na međusobnom rastojanju a.

a) Odrediti rad koji je potreban uložiti da bi se oterećenje q_2 približilo opterećenju q_1 na rastojanju b.

b) Izračunati rad ako je a = 0,4 m, b = 0,2m, $q_1 = q_2 = 10^{9} e$.

Rešenje:

a) Razlika potencijala tačaka 1 i 2 u nekom elektrostatičkom polju data je izrazom (Udžbenik, formula 17.1)

$$U_{12} = \int_1^2 E_s ds \quad ,$$

gde se integriranje tangencijalne komponente vektora jačine električnog polja izvodi duž puta s koji povezuje tačke 1 i 2. Rad A_{12} koji vrše sile polja pri premeštanju optrećenja q iz tačke 1 u tačku 2 jednak je (Udžbenik, formula 17.2)

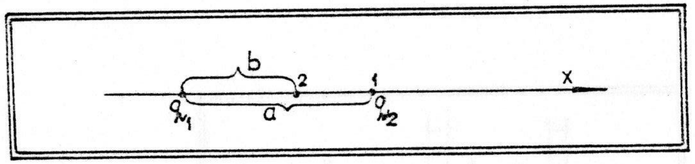
$$A_{12} = q\, U_{12} \ . \qquad (2)$$

Relacije (1) i (2) primenicemo u rešavanju našeg zadatka pozivajući se na sledeću sliku (sl.3.2.)

$$A_{12} = q_2 \int_1^2 \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x^2}\,dx \quad ,$$

$$A_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) ,$$

$$A_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) .$$



Sl.3.2.

Traženi rad spoljašnjih sila A jednak je radu A_{12} sa promenjenim znakom

$$A = -A_{12} \ ,$$

$$A_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 b}\left[1 - \frac{b}{a}\right] .$$

b)
$$A = \frac{(10^{9}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\,C)^2}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{F}{m}\cdot 0{,}2\ m}\left(1 - \frac{0{,}2}{0{,}4}\right) ,$$

$$A = \frac{1{,}6^2\cdot 0{,}5\cdot 9}{0{,}2}\cdot 10^{9+18-38}\ J,$$

$$A = 5{,}76\cdot 10^{-10}\ J \ .$$

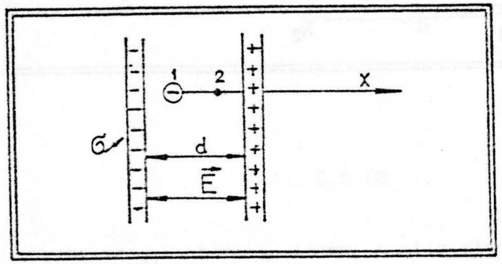
Analiza jedinica:

$$\left[\frac{C^2}{\frac{F}{m}\cdot m}\right] = \left[\frac{C^2}{F}\right] = \left[\frac{C^2}{\frac{C}{V}}\right] = \left[C\cdot V\right] = \left[J\right].$$

3.4.) a) Koji rad treba da urade spoljašnje sile da bi jedan elektron između obloga ravanskog kondenzatora bio udaljen od negativne obloge za polovinu rastojanja obloga. Površinska gustina opterećenja kondenzatora je σ.

b) Izračunati rad ako je $\sigma = 10^{-9}$ C/m^2 i $d = 1$ cm.

Rešenje:



Sl.3.3.

$A = -A_{12}$ (A_{12} - rad sila polja)

$A = -q\,U_{12}$ (U_{12} - napon između tačaka 1 i 2)

$$A = -e\int_1^2 E_x dx$$

$$A = -e\int_1^2 (-E)dx$$ (zašto dođe znak - (minus) uz E?)

$$A = eE\,\frac{d}{2}.$$

Pošto je $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$, biće definitivno:

$$A = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\,d\,.$$

b) $$A = 2\pi\,\frac{1{,}6\cdot10^{-19}C\cdot10^{-9}C/m^2}{\frac{10^{-9}}{9}\,\frac{F}{m}}\cdot10^{-2}m\,,$$

$$A = 1{,}6\cdot18\pi\cdot10^{-21}J\,,$$

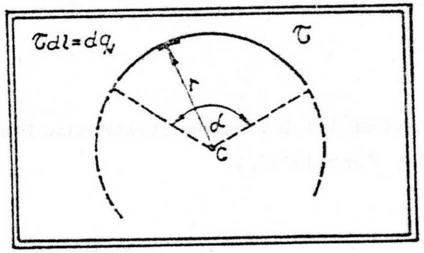
$$A = 9{,}048\cdot10^{-20}J\,.$$

3.5.) Deo kružnice koji se iz centra C vidi pod uglom α ravnomerno je naelektrisan linijskom gustinom opterećenja τ (sl. 3.4.)

a) Naći potencijal tačke C u odnosu na beskrajno udaljenu tačku.

b) Izračunati potencijal ako je $\alpha = 1$ rad i $\tau = 10^{-9}$ C/m.

Rešenje:



Sl.3.4.

a) Elemenat kružnice, dužine dl, nosi opterećenje dq. Ovaj elemenat daje doprinos potencijalu u tački C jednak

$$dU = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(shodno formuli 24.1, u Udžbeniku)

Ukupan potencijal tačke C je onda

$$U = \int dU = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\int dl \ ,$$

$$U = \frac{\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}\, r\alpha \ ,$$

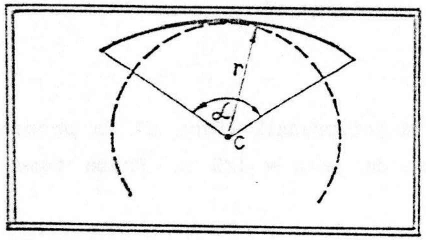
$$U = \frac{\tau\alpha}{4\pi\varepsilon_0} \ .$$

b)

$$U = \frac{10^{-9}\,\mathrm{C/m}}{\frac{10^{-9}}{9}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}}} \ ,$$

$$U = 9\mathrm{V} \ .$$

Pitanja i komentari. Zamislite da smo malo deformisali posmatrani deo kružnice, smanjujući krivinu, tako da dobijamo naelektrisanu liniju kao na sl. 3.5.



Sl.3.5.

Da li se povećao ili smanjio potencijal u tački C? A ako bi luk u celosti ispravili, dobivši duž na rastojanju r od tačke C, da li biste mogli u tom slučaju da izračunate potencijal u tački C, $U_{duž}$?

Pokazati sledeće: ako je $\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$ rad biće $\frac{U_{duž}}{U} = \sqrt{3}\ \ln\sqrt{3}$.

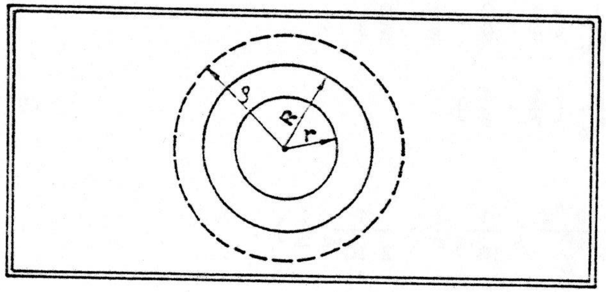
3.6.) Sfera radijusa r postavljena je u centar veće sfere radijusa R. Sfere su ravnomerno naelektrisane količinama opterećenja q i Q, respektivno.

a) Izračunati napon U između sfera.

b) Izračunati U ako je $q = 10^{-9}$C, $r = 10^{-2}$m i $R = 2\cdot 10^{-2}$m.

Rešenje:

a) Na slici 3.6. su skicirane dve sfere o kojima je reč.



Sl.3.6.

Ako je ρ poluprečnik zamišljene sfere koja obuhvata obe date sfere, potencijal tačaka na toj sferi biće

$$\varphi(\rho) = \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0\rho} \ . \qquad (1)$$

Ako je $\rho = R$, dobijamo za potencijal veće sfere

$$\varphi(R) = \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \ . \qquad (2)$$

Smemo li, shodno ovom, pisati za potencijal pri $\rho \le R$ $\varphi(\rho) = q/4\pi\varepsilon_0\rho$? To bi značilo da u granici $\rho \to R$ treba staviti $\varphi(R) = q/4\pi\varepsilon_0 R$, što bi protivrečilo relaciji (2). Zato valja uzeti $\varphi(\rho) = q/4\pi\varepsilon_0\rho + C$, gde konstantu C biramo shodno uslovu

$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \ . \qquad (3)$$

Odavde je $C = Q/4\pi\varepsilon_0 R$. Na osnovu ovog izračunavamo potencijal manje sfere

$$\varphi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} . \qquad (4)$$

Traženi napon je, dakle

$$U = \varphi(r) - \varphi(R) ,$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q + Q}{4\pi\varepsilon_0 R} ,$$

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{Q}{R} - \frac{q}{R} - \frac{Q}{R} \right) ,$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) . \qquad (5)$$

b)

$$U = \frac{9\cdot 10^{-9}C}{10^{-9}\frac{F}{m}} \left(\frac{1}{10^{-2}} \frac{1}{m} - \frac{1}{2\cdot 10^{-2}} \frac{1}{m} \right) ,$$

$$U = 9\left(1 - \frac{1}{2}\right) 10^2 \text{ V} ,$$

$$U = 4,5\cdot 10^2 \text{ V} .$$

Pitanja i komentari. Ako je $q > 0$, napon dat relacijom (5) uvek je pozitivan. Spojimo li žicom dve sfere, celo opterećenje će poteći i preći na sferu većeg radijusa. Povežite to sa idejom Kevendiševog (Cavendish) eksperimenta. Kako stoje argumenti ako je $q < 0$? Setite se ovog zadatka i kad se govori o Van de Grafovom generatoru.

3.7.) a) Procenite koliko ima elektrona u vašem organizmu.
b) Ako bi bilo moguće odstraniti sve elektrone iz 1 g supstancije vašeg organizma, na kom potencijalu biste se našli?

Rešenje:

a) Svakom elektronu, bilo kog atoma, odgovara jedan proton u jezgru tog atoma. Takođe, približno govoreći, na jedan proton dolazi i jedan neutron u jezgru. Prema tome, broj elektrona (N) u 1 kg bilo koje supstance približno je jednak broju atoma u jednom kilogramu deuterijuma (Z = 1, A = 2) t.j. polovini Avogadrovog

broja:

$$N \simeq \frac{6\cdot 10^{26}}{2} \frac{\text{elektrona}}{\text{kilogram}} ,$$

$$N \simeq 3\cdot 10^{26} \text{ elektrona /kg} .$$

Čovek od 80 kg imaće, dakle, oko:

$3\cdot 10^{26}\cdot 80$ elektrona, tj.

$2,4\cdot 10^{28}$ elektrona .

b) U jednom gramu supstancije imamo

$q \simeq 3\cdot 10^{23}$ elektrona .

Za procenu potencijala, uzećemo da se on može izračunati po formuli za potencijal usamljene sfere:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} .$$

Koju vrednost uzeti za poluprečnik sfere a? Za procenu, dovoljno tačno biće ako uzmemo da je a = 1/2 m. Prema tome, potencijal organizma bi bio:

$$\varphi \simeq \frac{3\cdot 10^{23}\cdot 1,6\cdot 10^{-19}}{\frac{10^{-9}}{9}\cdot\frac{1}{2}} \text{ V} ,$$

$$\varphi \simeq 5,4\cdot 10^{14} \text{ V} . \qquad (1)$$

Ogromna vrednost!

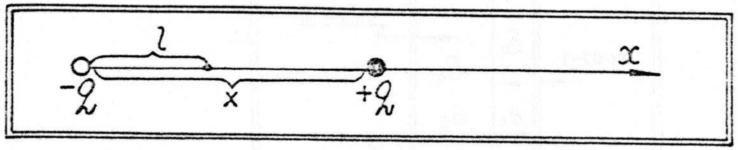
Pitanja i komentari. MATTER REALLY IS FULL OF ELECTRICITY! (Materija je zbilja prepuna elektriciteta!), uzviknuo je E.M.Purcell suočen sa rezultatom zadatka sličnog ovom koji smo izložili. Da, supstancija je naćićkana elektricitetom ... Videti: American Journal of Physics, 51 (7), 1983, strana 586.

Na ovu temu dali su mnogi autori instruktivne i inspirativne zadatke. Na primer, korisno je videti izlaganje Fejnmana, t.5, s.9, u svom poznatom kursu fizike. Pokušajte i vi da oformite neku zanimljivu ilustraciju o sve prisutnosti elektriciteta u supstanciji i jačini električnih sila.

3.8) Tačkasto opterećenje +q nalazi se na udaljenosti l od tačkastog opterećenja - q, sl. 3.7.

a) Izračunati rad A koji je potrebno utrošiti da bi se opterećenje + q veoma mnogo udaljilo od opterećenja -q.
b) Izračunati A ako je $q = 10^{-10}$C i $l = 10^{-2}$m.

Rešenje:



Sl.3.7.

a) Kada je opterećenje +q udaljeno za x od opterećenja - q, sila privlačenja iznosi

$$F(x) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} .$$

Traženi rad će biti

$$A = \int_l^\infty F(x)dx ,$$

$$A = \int_l^\infty \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 x^2} dx ,$$

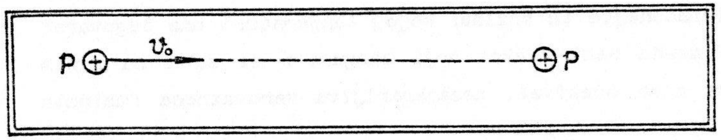
$$A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l} .$$

b)

$$A = \frac{10^{-20}C^2}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{F}{m}\cdot 10^{-2}m} ,$$

$$A = 9\cdot 10^{-9} J.$$

3.9.) Proton, čija je početna brzina v_0, kreće se ka drugom protonu koji miruje, sl.3.8.



Sl.3.8.

a) Do kog minimalnog rastojanja r_0 od nepokretnog protona će pokretni proton stići, ako uzmemo da je fizički kriterijum za ostvarivanje tog događaja jednakost kinetičke energije nailazećeg protona (E_k) i elektrostatičke energije međusobnog odbijanja dva protona (E_p).
b) Izračunati r_0 ako je $v_0 = 10^6$m/s.

Rešenje:

a)

$$E_k = \frac{1}{2} mv_0^2 ,$$

$$E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} .$$

$$E_k = E_p \Rightarrow \frac{1}{2} mv_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0} \Rightarrow$$

$$r_0 = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv_0^2} .$$

$$r_0 \approx \frac{2\cdot 1,6^2\cdot 10^{-19}\cdot 10^{-19}\ C^2}{\frac{10^{-9}}{9}\ \frac{F}{m}\cdot 1,6\cdot 10^{-28}kg\cdot 10^{12}\ \frac{m^2}{s^2}},$$

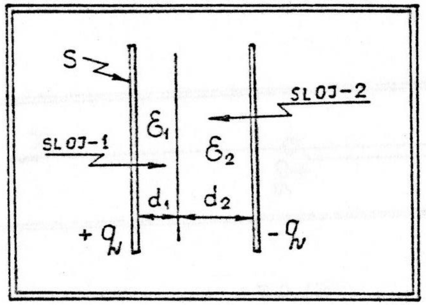
$$r_0 \approx 28,8\cdot\ 10^{28+9-12-38}m\ ,$$

$$r_0 \approx 3\cdot 10^{-12}m\ .$$

tanja i komentari. Ako bi brzina protona bila toliko velika da odgovara radijusu dejstva nuklearnih sila, šta bi se moglo ekivati? Izračunajte tu brzinu; kojoj temperaturi ona odgovara? a li znate možda neki efekat koji omogućava da se i na nižim temperaturama može očekivati nezanemarljiva verovatnoća fuzionih procesa?

4. ENERGIJA ELEKTRIČNOG POLJA

4.1.) Ravni kondenzator ima obloge površine S. Prostor između obloga u celosti je ispunjen sa dva sloja dielektrika (sl. 4.1.): sloj debljine d_1 (koji ima dielektričnu propustljivost ε_1) i sloj debljine d_2 (koji ima dielektričnu propustljivost ε_2).



Sl.4.1.

a) Naći kapacitet ovog kondenzatora.

b) Izračunati kapacitet ako je $S = 1\ m^2$, $d_1 = 2$ cm; $d_2 = 3$ cm; $\varepsilon_1 = 2$ i $\varepsilon_2 = 3$.

Rešenje:

a) Napon U između obloga kondenzatora je

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \tag{1}$$

gde su E_1 i E_2 jačine električnog polja u slojevima 1 i 2.

E_1 nalazimo pomoću izraza za polje između dve paralelne naelektrisane ravni:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}. \qquad (2)$$

Slično, za E_2 će biti:

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_2}, \qquad (3)$$

σ je ovde q/S, površinska gustina opterećenja na oblogama. Smenom (2) i (3) u (1) dobijamo:

$$U = \frac{q}{S\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}\right). \qquad (4)$$

Traženi kapacitet C nalazimo iz definicije one relacije $C = q/U$. Dakle:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_1} + \frac{d_2}{\varepsilon_2}}. \qquad (5)$$

b) $$C = \frac{1}{9} \frac{10^{-9}\,\frac{F}{m} \cdot 1m^2}{\frac{2 \cdot 10^{-2} m}{2} + \frac{3 \cdot 10^{-2} m}{3}} \frac{1}{4\pi},$$

$$C \simeq 0{,}44 \text{ nF}.$$

Pitanja i komentari. Izraz (5) za kapacitet liči na obrazac za izračunavanje kapaciteta ravnog kondenzatora koji između obloga ima izotropan i homogen dielektrik dielektrične propustljivosti ε

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}.$$

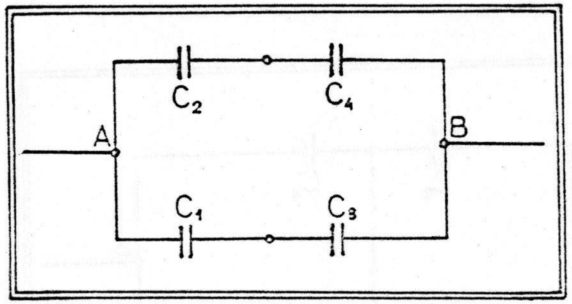
Kolika mora biti ekvivalentna dielektrična propustljivost tog dielektrika da bi kapacitet kondenzatora bio jednak kapacitetu kondenzatora o kome se govori u ovom zadatku? Sa D_1 i D_2 obeležimo dielektrični pomeraj u slojevima 1 i 2. Granični uslov na razdvojnoj površini nalaže da je $D_1 = D_2$, tj.

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2.$$

Jačine polja nisu iste u dva sloja. U kom delu je polje jače? Od kakvog je to značaja za određivanje probojnog napona za jedan

ovakav složeni kondenzator? Videti još jednom izlaganje u udžbeniku (§ 44, strana 86).

4.2) Posmatrajmo bateriju kondenzatora vezanih kao na sl. 4.2.



Sl. 4.2.

a) Naći ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B.

b) Ako se tačke C i D kratko spoje, nađite u tom slučaju ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B.

c) Mogu li se kapaciteti C_1, C_2, C_3 i C_4 tako izabrati da umetanje kratke veze između tačaka C i D ne menja ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B?

Rešenje:

a) Ekvivalentni kapacitet grane I iznosi:

$$C_I = \frac{C_2 \cdot C_4}{C_2 + C_4}. \qquad \text{(redna veza)}$$

Ekvivalentni kapacitet grane II iznosi:

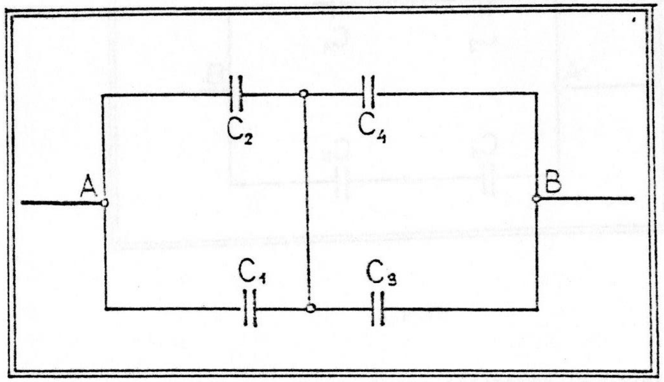
$$C_{II} = \frac{C_2 \cdot C_3}{C_2 + C_3}. \qquad \text{(redna veza)}$$

Kondenzatori C_I i C_{II} su paralelno vezani. Zato je

$$C_{AB} = C_I + C_{II} \, ,$$

$$C_{AB} = \frac{C_2 \cdot C_4}{C_2 + C_4} + \frac{C_1 \cdot C_3}{C_1 + C_3} \, .$$

b) Kad se tačke C i D (sl.4.2) kratko spoje, dobija se šema prikazana na sl 4.3.



Sl.4.3.

Kondenzatori C_1 i C_2 su sada paralelno vezani; ekvivalentni kapacitet je

$$C_A = C_1 + C_2 \, .$$

$$C_B = C_3 + C_4 \, .$$

Kondenzatori C_A i C_B su redno vezani te zato imamo da je ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B u ovom slučaju

$$C'_{AB} = \frac{C_A C_B}{C_A + C_B} \, ,$$

$$C'_{AB} = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \, .$$

c) Prema uslovu zadatka treba da bude

$$C_{AB} = C'_{AB} \, .$$

Dakle:

$$\frac{C_2 C_4}{C_2 + C_4} + \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_3} = \frac{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)}{C_1 + C_2 + C_3 + C_4} \, .$$

Lako je proveriti da se ova jednakost svodi na proporciju

$$\frac{C_1}{C_3} = \frac{C_2}{C_4} \, . \qquad (1)$$

Dakle, ako važi uslov (1), umetanje kratke veze između tačaka C i D ne menja ekvivalentni kapacitet između tačaka A i B.

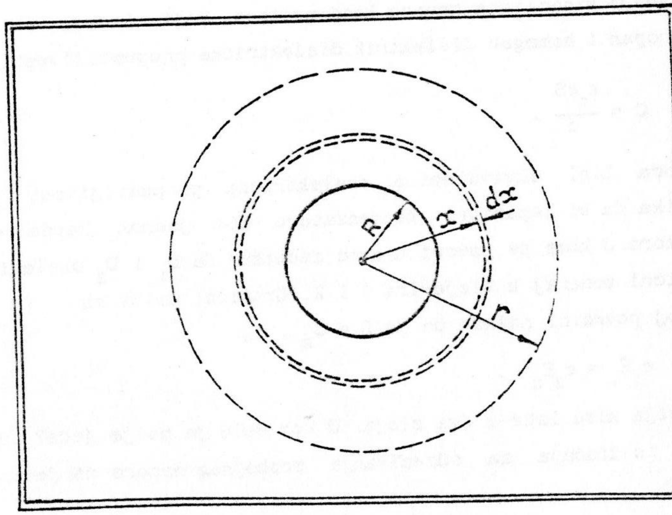
4.3) Metalna kugla poluprečnika R ravnomerno je naelektrisana količinom opterećenja q. Oko kugle je homogeni i izotropni dielektrik dielektrične permitivnosti ε.

a) Odrediti energiju W električnog polja koja je sadržana u sferi poluprečnika r.

b) Izračunati W ako je q = 2nC, ε = 2 , R = 1 cm i r = 2 cm.

Rešenje:

a) Jačina električnog polja na rastojanju x od centra kugle je (sl.4.4.)



Sl.4.4.

$$E(x) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon x^2} .$$

U sfernoj ljusci debljine dx sadržana je energija dW

$$dW = wdV ,$$

gde je elemenat zapremine dV jednak $4\pi x^2 dx$, a w je zapreminska gustina energije električnog polja u tom elementu:

$$w = \frac{1}{2}\, \varepsilon\varepsilon_0\, E(x)^2 .$$

Traženu energiju W naći ćemo integracijom:

$$W = \int dW = \int_R^r \frac{1}{2}\, \varepsilon_0 \varepsilon \cdot \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon\varepsilon_0)^2 x^4} \cdot 4\pi x^2 dx ,$$

$$W = \frac{1}{2}\, \varepsilon_0 \varepsilon \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon\varepsilon_0)^2}\, 4\pi \int_R^r \frac{dx}{x^2} ,$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \frac{1}{x} \Big|_r^R ,$$

$$W = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right).$$

b)

$$W = \frac{1}{2} \frac{4\cdot 10^{-18} C^2}{\frac{10^{-9}}{9} \frac{F}{m} \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot 10^{-2} \frac{1}{m}$$

$$W = 9\cdot 10^{-9} \cdot \frac{1}{2}\, J ,$$

$$W = 4,5\ nJ .$$

Pitanja i komentari.

U ovom zadatku je korisno pogledati šta se događa ako $r \to \infty$. Izračunajte u tom slučaju W. U članu $q^2/4\pi\varepsilon_0\varepsilon R$ šta prepoznajete? Faktor 1/2 zbog čega postoji?

Uzmite da analizirate i granični slučaj $R \to 0$. Ima li tu

nešto nelogično? Zbog čega po vašem mišljenju nastaje teškoća? Preporučujemo da s tim u vezi pročitate u poznatom Fejmanovom kursu fizike poglavlje o elektromagnetskoj masi, §1 (u tomu 6 ruskog prevoda knjige na str. 305).

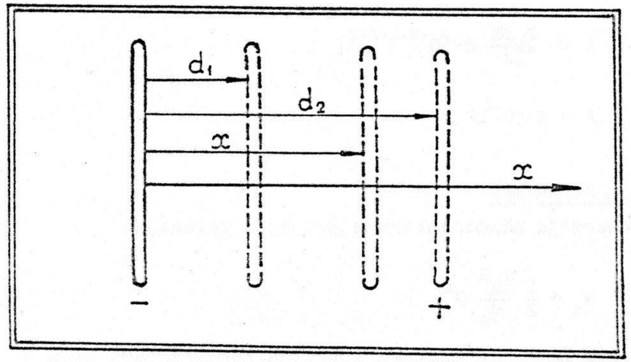
4.4) Ravanski vazdušni kondenzator debljine d_1 ima obloge površine S. Kondenzator je priključen na izvor napajanja koji ima konstantnu e.m.s. $\mathcal{E}$.

a) Ne prekidajući vezu kondenzatora sa izvorom napajanja, razmičemo obloge kondenzatora, do nekog finalnog stanja kada dobijamo kondenzator debljine d_2. Pri tome smo izvršili neki rad. Koliki?

b) Izračunati taj rad ako je $S = 2,26\cdot 10^{-1} m^2$, $d_1 = 10^{-2}$ m i $d_2 = 2\cdot 10^{-2}$m, a $\mathcal{E} = 2\cdot 10^3$V.

Rešenje:

a) Skicirajmo premeštanje jedne obloge, na primer pozitivno opterećene u pravcu x koji je normalan na oblogu (sl.4.5.):



Sl.4.5.

U položaju kada je debljina kondezatora x, leva nepomična obloga će privlačiti desnu oblogu silom F(x) za koju se zna (videti udžbenik, relacija 72.3) da je

$$F(x) = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2(x) ,$$

gde je $E(x) = \frac{\mathcal{E}}{x}$ jačina električnog polja u kondenzatoru. Da bi smo pomerili oblogu za dx u smeru +x ose, moramo dakle izvršiti rad

$$dA = F(x)dx,$$

savlađujući silu privlačenja obloga. Ukupan rad, potreban da se obloga pomeri do rastojanja d_2 će iznositi

$$A = \int_{d_1}^{d_2} F(x)\, dx,$$

$$A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2 \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x^2} ,$$

$$A = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S\mathcal{E}^2 \left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}\right).$$

b) $$A = \frac{1}{2}\,\frac{\frac{10^{-9}}{9}\frac{F}{m}}{4\pi}\cdot 2,26\cdot 10^{-1}m^2 4\cdot 10^6 V^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) 10^2 \frac{1}{m} ,$$

$$A = \frac{2,26}{72\pi}\cdot 2\cdot 10^{-9-1+6+2} J ,$$

$$A = 2\cdot 10^{-4} J .$$

Pitanja i komentari.

Nađimo energiju kondenzatora u krajnjem položaju:

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d_2}\mathcal{E}^2 .$$

Pošto znamo da je na početku energija kondenzatora bila

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}\mathcal{E}^2 ,$$

vidimo da je $W_2 < W_1$. Kako je to moguće? Spoljašnje sile su vršile rad protiv sila polja i deformisale kondenzator, a njegova se energija nije povećala, naprotiv smanjila se? Uporediti ovaj

zadatak sa zadatkom 4.5. Tamo ne nailazimo na ovakvu teškoću. Zašto? Šta je bilo sa jednim delom opterećenja sa obloga kondenzatora? Ako vam ovo pitanje zadaje teškoće, pročitajte u udžbeniku §72.

4.5) Ravanski vazdušni kondenzator debljine d_1 ima obloge površine S. Opterećen je do napona U, pa otkaćen od izvora napajanja.

a) Da bi se obloge rastavile na dvaput veće rastojanje od postojećeg, treba uložiti izvestan rad. Koliki?

b) Izračunati taj rad ako je $S \approx 12,56\ m^2$ $(4\pi\ m^2)$, $d_1 = 5\cdot 10^{-3} m$ i $U = 3\cdot 10^3$ V.

Rešenje:

a) Nađimo prvo energiju W_1 kondenzatora pre razmicanja obloga:

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_1} ,$$

gde je kapacitet $C_1 = \varepsilon_0 S/d_1$ kapacitet, a $q = C_1 U$ opterećenje obloga. Dakle:

$$W_1 = \frac{1}{2}\frac{C_1^2 U^2}{C_1} = \frac{1}{2} C_1 U^2 ,$$

$$W_1 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{S}{d_1} U^2 . \qquad (1)$$

Nađimo sada energiju W_2 kondezatora posle rastavljanja obloga:

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_2} .$$

Po uslovu zadatka, q je ostalo isto $(q = C_1 U)$, dok je finalna vrednost kapaciteta

$$C_2 = \varepsilon_0 \frac{S}{d_2} .$$

Zato je

$$W_2 = \frac{1}{2}\frac{C_1^2 U^2}{\varepsilon_0 \frac{S}{d_2}} ,$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\varepsilon_0^2 S^2}{d_1^2}\,U^2}{\varepsilon_0 \dfrac{S}{d_2}} ,$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 S U^2}{d_1^2}\,d_2 . \qquad (2)$$

Po zakonu održanja energije u električnim procesima, traženi rad A će biti, prema (1) i (2),

$$A = W_2 - W_1 ,$$

$$A = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 S U^2}{d_1^2}\,d_2 - \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 S}{d_1}\,U^2 ,$$

$$A = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 S\,\frac{U^2}{d_1^2}\,(d_2 - d_1) . \qquad (3)$$

Ako je, kao što se u zadatku traži, $d_2 = 2d_1$, imamo dakle

$$A = \frac{1}{2}\,\varepsilon_0 S\,\frac{U^2}{d_1} . \qquad (4)$$

b)

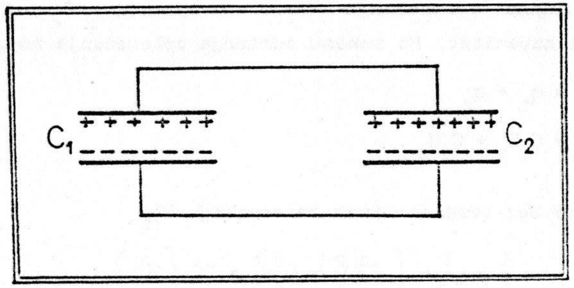
$$A = \frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{10^{-9}}{9}\,\dfrac{F}{m}}{4\pi}\,4\pi m^2\,\frac{9\cdot 10^6 V^2}{\dfrac{1}{2}\,10^{-2} m} ,$$

$$A = 10^{-1} J.$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{\dfrac{F}{m}\cdot m^2}{m}\cdot V^2\right] = \left[F\cdot V^2\right] = \left[\frac{C}{V}\cdot V^2\right] = \left[C\cdot V\right] = [J] .$$

4.6.) Kondenzator kapaciteta C_1 bio je opterećen do napona U_1, a kondenzator kapaciteta C_2 do napona U_2. Posle toga je od ovih kondenzatora napravljena veza kao na sl. 4.6.



Sl.4.6.

a) Opisati energetski bilans koji nastaje pri ovoj transformaciji.

b) Izvršiti proračun ako je $U_1 = 2\cdot 10^3$ V, $U_2 = 10^3$ V, $C_1 = 6\cdot 10^{-6}$F i $C_1 / C_2 = 2$.

Rešenje:

a) Na početku, kondenzator C_1 imao je energiju

$$W_1 = \frac{1}{2}\,C_1 U_1^2 ,$$

dok je drugi kondenzator imao energiju

$$W_2 = \frac{1}{2}\,C_2 U_2^2 .$$

Dakle, ova dva kondenzatora su na početku imala ukupnu energiju

$$W_I = W_1 + W_2 ,$$

$$W_I = \frac{1}{2}\,C_1 U_1^2 + \frac{1}{2}\,C_2 U_2^2 ,$$

$$W_I = \frac{1}{2}\,\frac{1}{C_1 + C_2}\left\{ C_1^2 U_1^2 + C_2^2 U_2^2 + C_1 C_2 U_1^2 + C_1 C_2 U_2^2 \right\} . \qquad (1)$$

Posle spajanja sistema prema šemi sa sl. 4.6, imaćemo kombinaciju kondenzatora sa ukupnom energijom W_{II} koju izračunavamo na uobičajeni način:

$$W_{II} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C_e}\,.$$

Ovde je q ukupno opterećenje dva kondenzatora, a $C_e = C_1 + C_2$ ekvivalentni kapacitet. Po zakonu održanja opterećenja mora biti

$$q = q_1 + q_2\,,$$

$$q = C_1U_1 + C_2U_2\,.$$

Sada dobijamo bez teškoća izraz za energiju W_{II}

$$W_{II} = \frac{1}{2}\frac{1}{C_1 + C_2}\left\{C_1^2U_1^2 + C_2^2U_2^2 + 2C_1C_2U_1^2\right\}. \qquad (2)$$

Nađimo promenu energije ΔW:

$$\Delta W = W_{II} - W_I\,,$$

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\frac{1}{C_1 + C_2}\left(U_1^2 + U_2^2 - 2U_1U_2\right)C_1C_2\,,$$

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}\left(U_1 - U_2\right)^2\,. \qquad (3)$$

Dakle, kad se dva opterećena kondenzatora vežu, ukupna energija se smanjuje - znači došlo je do delimičnog pražnjenja u sistemu.

b)

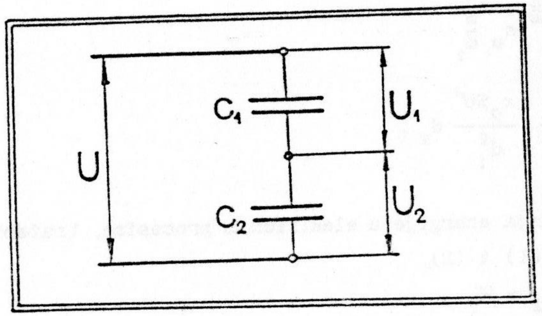
$$\Delta W = -\frac{1}{2}\,\frac{6\cdot 10^{-6}\mathrm{F}}{1 + 2}\cdot 10^{6}\mathrm{V}^2\,,$$

$$\Delta W = -1\mathrm{J}\,.$$

Analiza jedinica

$$\left[\mathrm{F}\cdot\mathrm{V}^2\right] = \left[\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{V}}\cdot\mathrm{V}^2\right] = \left[\mathrm{C}\cdot\mathrm{V}\right] = \left[\mathrm{J}\right].$$

Pitanja i komentari Pretpostavite da su kondenzatori C_1 i C_2 predhodno napunjeni, respektivno do napona U_1 i U_2, pomoću kola čija je šema data na sl.4.7.



Sl.4.7.

Prilagoditi relaciju (3) tako da opisuje upravo ovaj slučaj.

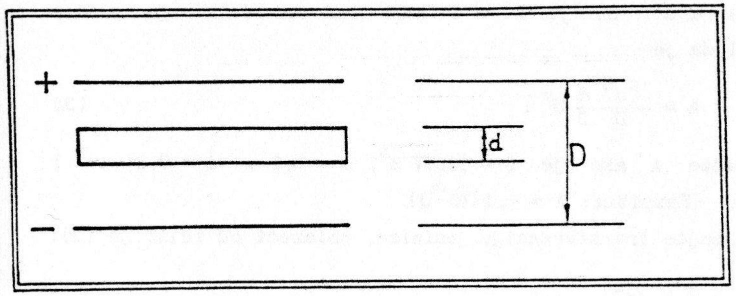
$$\left[\ \text{Rezultat je: } \Delta W = \frac{1}{2}\,\frac{C_1C_2}{(C_1 + C_2)^3}\,(C_1 - C_2)^2U^2\ \right]$$

Pretpostavimo sada da su kondenzatori predstavljali dva jednaka vazdušna kondenzatora kapaciteta C napunjena do napona U_0. Potom između obloga jednog kondenzatora stavljamo dielektrik dielektrične propustljivosti ε i dva kondenzatora vežemo prema šemi sa sl. 4.6. Na šta će se u ovom slučaju svesti formula za izračunavanje ΔW? Rezultat:

$$\Delta W = -\frac{1}{2}\,\frac{(\varepsilon - 1)^2}{\varepsilon(\varepsilon + 1)}\cdot CU_0^2\,.$$

Domaći zadatak: Kondenzator kapaciteta $C_1 = 2\cdot 10^{-6}$ F opterećen je do napona $U_1 = 100$ V, pa spojen paralelno sa kondenzatorom $C_2 = 10^{-6}$ F na čijim oblogama prethodno nije bilo opterećenja. Koliko energije se prilikom spajanja utroši na proces električnog pražnjenja u sistemu? Odgovor: 3,3 mJ.

4.7.) Posmatrajmo ravanski kondenzator površine S i debljine D. U prostoru između obloga nalazi se metalna pločica debljine d (sl. 4.8.).



Sl.4.8.

Kondenzator nije priključen na izvor za napajanje, ali je prethodno opterećen do napona U.

a) Naći energiju kondenzatora.

b) Naći energiju tog kondenzatora ako metalne pločice ne bi bilo.

c) Naći količnik te dve energije; je li on veći ili manji od jedinice? Šta iz toga zaključujete?

Rešenje:

a) Ako pomoću linija sila skiciramo strukturu električnog polja u kondenzatoru, dobićemo situaciju prikazanu na sl. 4.9. Jasno je sa slike da sistem možemo tretirati kao dva kondenzatora redno vezana. Kapacitet prvog, C_1, iznosi

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{\delta} ,$$

dok je kapacitet drugog, C_2, jednak

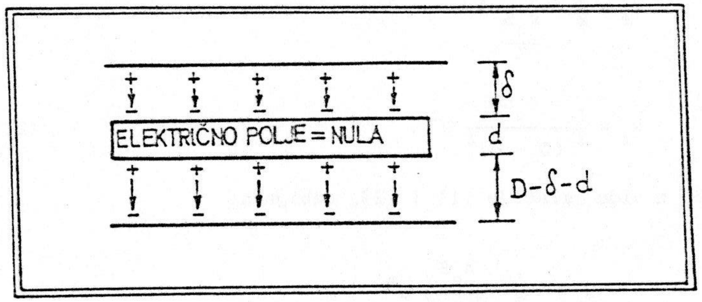
$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{D - d - \delta} .$$

Ekvivalentni kapacitet će biti

$$C_e = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} ,$$

$$C_e = \frac{\frac{\varepsilon_0 S}{\delta} \cdot \frac{\varepsilon_0 S}{D - d - \delta}}{\frac{\varepsilon_0 S}{\delta} + \frac{\varepsilon_0 S}{D - d - \delta}} ,$$

$$C_e = \frac{\varepsilon_0 S}{D - d} .$$



Sl.4.9.

Sada je moguće izračunati W_1, energiju kondenzatora sa pločicom

$$W_1 = \frac{1}{2} C_e U^2 ,$$

(videti u udžbeniku formulu 34.2). Odavde je

$$W_1 = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0 S}{D - d} U^2 . \tag{1}$$

b) Posle uklanjanja metalne pločice, promenio se napon na kondenzatoru. Međutim, ostalo je isto opterećenje obloga q:

$$q = C_e U .$$

Energiju kondenzatora bez pločice, W_2, izračunaćemo stoga pomoću formule

$$W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{C}\,,$$

gde je C kapacitet kondenzatora bez prisustva pločice, jednak

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{D}\,.$$

Dakle:

$$W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{C_e^2 U^2}{C}\,,$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{\varepsilon_0 S}{D - d}\right)^2 U^2}{\frac{\varepsilon_0 S}{D}}\,,$$

$$W_2 = \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 SD}{(D - d)^2}\,U^2\,. \qquad (2)$$

Imajući u vidu relacije (1) i (2), dobijamo:

$$\text{(c)} \qquad k = \frac{W_1}{W_2} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 S}{D - d}\,U^2}{\frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_0 SD}{(D - d)^2}\,U^2}\,,$$

$$k = \frac{D - d}{D}\,,$$

$$k = 1 - \frac{d}{D}\,.$$

Posle izvlačenja pločice povećala se energija kondenzatora. To znači da treba uložiti rad da bi se pločica izvukla. Po zakonu održanja energije, W_2 je veće od W_1 upravo za iznos tog rada.

Pitanja i komentari

U udžbeniku pročitajte §72 (zakon održanja energije za električno polje).

Da li biste mogli, ne vršeći konkretna izračunavanja, da pokažete kako je za izvlačenje metalne pločice zaista potrebno upotrebiti neku spoljašnju silu?

Smatrajući da je $d \ll D$ naći rad A izvlačenja pločice. Pokazati da je

$$A \approx \frac{\varepsilon_0 S}{D}\,\frac{d}{D}\,U^2\,. \qquad (3)$$

Izračunajte A ako je $S = 12{,}57\ \text{m}^2$, $D = 0{,}1$ m, $d = 0{,}01$ m i $U = 10^3$ V. (Rezultat: $A \approx 1{,}1\cdot 10^{-7}$ J).

Vežbajte transformaciju jedinica, polazeći od relacije (3):

$$\left[\frac{\frac{F}{m}\cdot m^2}{m}\,\frac{m}{m}\,V^2\right] = [\,J\,]\,.$$

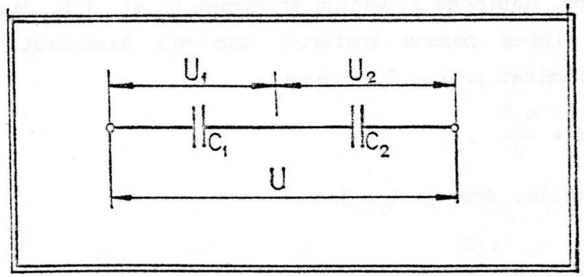
4.8) Dva kondenzatora, kapaciteta C_1 i C_2 ($C_1 > C_2$), vezana su na red. Na sistem je priključen napon U. Poznato je da kondenzatori imaju dielektrik za koji je probojni napon jednak U_p.

a) Koji je minimalni napon U_{min} pri kome će jedan od kondenzatora biti probijen?

b) Izračunati U_{min} ako je $U_p = 2\cdot 10^4$ V i $C_1/C_2 = 2$.

c) Koliki je pri tome napon na onom drugom kondenzatoru, neposredno pre proboja?

Rešenje:



Sl. 4.10.

a) Za rednu vezu kondenzatora važi

$$C_1U_1 = C_2U_2 , \qquad (1)$$

gde su U_1 i U_2 naponi na kondenzatorima (4.10). Kako je, sem toga,

$$U_1 + U_2 = U ,$$

dobijamo bez teškoća sledeće dve relacije:

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U , \qquad (2)$$

$$U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} U . \qquad (3)$$

Pošto je po uslovu zadatka $C_2 < C_1$, očigledno će uslov

$\frac{C_1}{C_1 + C_2} U = U_p$ biti realizovan pri manjem naponu U nego uslov

$\frac{C_2}{C_1 + C_2} U = U_p$. Zato je $U_{min} = \frac{C_1 + C_2}{C_1} U_p$.

Osetljiviji na eventualni proboj pri visokim naponima biće dakle kondenzator većega kapaciteta.

b) $$U_{min} = \frac{2 + 1}{2} 2 \cdot 10^4 \text{ V} ,$$

$$U_{min} = 3 \cdot 10^4 \text{ V} .$$

c) $$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} U_{min} ,$$

$$U_1 = \frac{1}{2 + 1} 3 \cdot 10^4 \text{ V} ,$$

$$U = 10^4 \text{ V} .$$

Pitanja i komentari

Iz kog fizičkog principa sledi relacija (1)? U radu sa konstantnim naponima nerado se primenjuje redna veza kondenzatora;

zašto? Pročitajte još jednom kraj §35 u udžbeniku.

4.9.) Ravanski kondenzator debljine d opterećen je do razlike potencijala između obloga U.

a) Kolika je zapreminska gustina energije električnog polja, w, u kondenzatoru?

b) Izračunati w ako je $U = \sqrt{72\pi}$ V i $d = 10^{-3}$m.

Rešenje:

a) Zapreminska gustina energije električnog polja izračunava se pomoću formule (videti udžbenik, relacija 37.1)

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 . \qquad (1)$$

Jačina električnog polja E u ravanskom kondenzatoru data je poznatim izrazom

$$E = \frac{U}{d} . \qquad (2)$$

Smenom (2) u (1) dobijamo

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{U^2}{d^2} .$$

b) $$w = \frac{10^{-9}}{8\pi \cdot 9} \frac{\text{F}}{\text{m}} \frac{72\pi \text{V}^2}{10^{-6}\text{m}^2} ,$$

$$w = 10^{-3} \frac{\text{J}}{\text{m}^3} .$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \frac{\text{V}^2}{\text{m}^2}\right] = \left[\frac{\text{F}\cdot\text{V}\cdot\text{V}}{\text{m}^3}\right] = \left[\frac{\text{C}\cdot\text{V}}{\text{m}^3}\right] = \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3}\right] .$$

4.10.) Dat je ravanski kondenzator čije su obloge u vidu pravougaonika dužine a i širine b. Na negativnoj oblozi nalazi se N elektrona više nego na pozitivnoj.

a) Odrediti napon U, između obloga kondenzatora, ako su one na međusobnom rastojanju d.

b) Izračunati U ako je $N = 10^{12}$ elektrona, $d = 10^{-2}$m, $a = 5\cdot10^{-1}$m i $b = 3\cdot10^{-1}$m.

Rešenje:

a) Prema uslovu zadatka, opterećenje obloga Q je poznata veličina:

$$Q = e\cdot N \qquad (e \text{ - opterećenje elektrona})$$

Napon je moguće naći pomoću poznate relacije

$$U = \frac{Q}{C},$$

gde je C kapacitet kondenzatora. Pošto se radi o ravanskom kondenztoru, treba da bude

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Dakle, pošto je $S = a\cdot b$, imaćemo definitivno

$$U = \frac{e\,N\,d}{\varepsilon_0 a\, b}. \qquad (1)$$

b)
$$U = \frac{1{,}6\cdot10^{-19}\text{C}\cdot10^{12}\cdot10^{-2}\text{m}}{\frac{10^{-9}}{9}\frac{\text{F}}{\text{m}}\cdot5\cdot10^{-1}\text{m}\cdot3\cdot10^{-1}\text{m}}\,4\pi,$$

$$U = \frac{9\cdot1{,}6}{15}\,4\pi\,10^{12-21+9+2}\text{V},$$

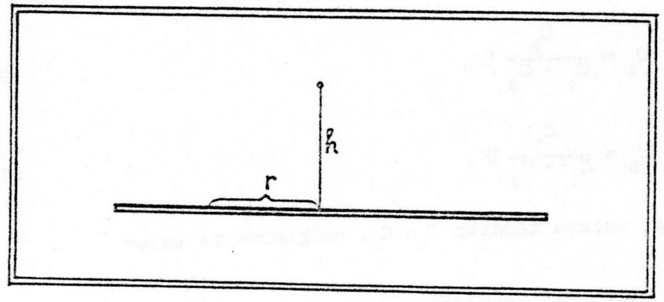
$$U = 1206\ \text{V}.$$

Pitanja i komentari

Umesto ravanskog kondenzatora, posmatrajte sferni kondenzator iste debljine d. Neka su S_1 i S_2 površine obloga sfernog kondenzatora. Za isti broj N, da li će napon na njemu biti veći ili manji od napona datog formulom (1) (smatrati da je $S = \sqrt{S_1\cdot S_2}$)?

Slično upoređenje dajte i za cilindrični kondenzator.

4.11.) Tačkasto pozitivno opterećenje q nalazi se iznad provodne ravni (sl. 4.11.)



Sl. 4.11.

a) Kojom silom se privlače opterećenje i ravan?

b) Opterećenje q izaziva (negativno) opterećenje na provodnoj ravni čija je površinska gustina

$$\sigma(r) = -\frac{q\,h}{2\pi\left(\sqrt{r^2+h^2}\right)^3}.$$

Pokazati to.

Rešenje:

a) Ako primenimo metod lika u ogledalu, vidimo da je tražena sila identična sili privlačenja dva tačkasta raznoimena opterećenja na međusobom rastojanju 2h. Kulonov zakon onda daje

$$F = -\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0(2h)^2},$$

$$F = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2} \; . \qquad (1)$$

b) Zamislimo na provodnoj ravni prsten poluprečnika r, debljine

dr. Njemu pripada opterećenje

$$dQ = \sigma(r)\cdot dS \; .$$

Ovo opterećenje integruje sa opterećenjem q silom

$$dF = \frac{q\,dQ}{4\pi\varepsilon_0 (r^2 + h^2)}\cdot\frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} \; .$$

$\left(\frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}\right.$ stoji zato što uzimamo u obzir samo

projekciju sile na normalu na ravni - zašto?).

Ukupnu silu nalazimo integraleci po celoj ravni:

$$F = \int_0^{\infty} \frac{q\sigma(r)2\pi r dr}{4\pi\varepsilon_0 (\sqrt{r^2 + h^2}\,)^3}\, h \; ,$$

$$F = \frac{2\pi qh}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{\sigma(r) r dr}{(\sqrt{r^2 + h^2}\,)^3} \; ,$$

Stavimo li ovde $\sigma(r) = -\, qh/\,[2\pi(\sqrt{r^2 + h^2}\,)^3]$ dobijamo

$$F = -\frac{q^2h^2}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{rdr}{(r^2 + h^2)^3} \; ,$$

$$F = -\frac{q^2h^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_0^{\infty}\frac{d(r^2 + h^2)}{(r^2 + h^2)^3} \; ,$$

$$F = -\frac{q^2h^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{h^2}^{\infty}\frac{dt}{t^3} \; .$$

$$F = -\frac{q^2h^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\Big|_{\infty}^{h^2} \; ,$$

$$F = -\frac{q^2h^2}{16\pi\varepsilon_0}\,\frac{1}{h^4} \; ,$$

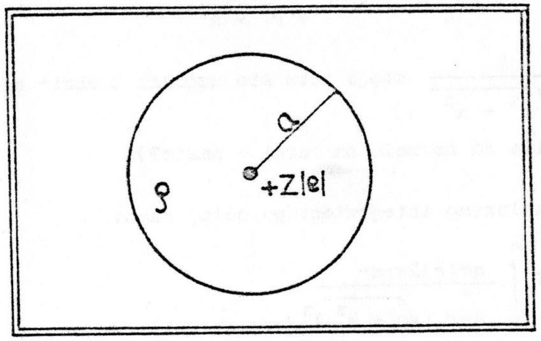
$$F = -\frac{q^2}{16\pi\varepsilon_0 h^2} \; . \qquad (2)$$

Izrazi za silu (1) i (2) su identični, kao što i treba da bude. To istovremeno znači da je predloženi izraz za površinsku gustinu, , $\sigma(r)$, tačan.

5. DIELEKTRICI

урађи на [illegible]!!!

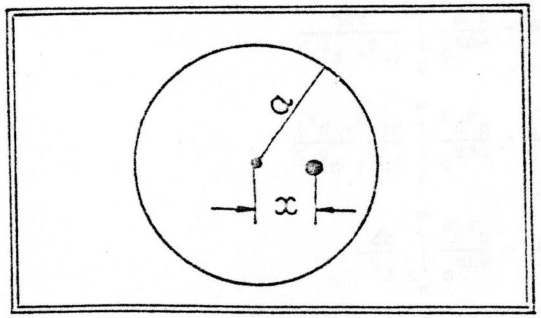
5.1.) Dat je model atoma kao na sl. 5.1. Pozitivno naelektrisanje jezgra iznosi $+Z|e|$, gde je Z redni broj atoma. Negativno naelektrisanje jednako je $-Z|e|$ i po pretpostavci, ravnomerno je raspoređeno u sferi radijusa a (radijus atoma). Izračunati polarizabilnost atoma. Uzimajući da je $a = 6{,}5\cdot 10^{-11}$m naći brojnu vrednost polarizabilnosti atoma.



Sl. 5.1.

Rešenje:

Kada se atoma nalazi u spoljašnjem električnom polju, ravnoteža opterećenja sa sl.5.1 menja se: centar pozitivnih opterećenja pomera se u odnosu na centar negativnih optećenja (centar sfere radijusa a) za dužinu x, sl. 5.2.



Sl.5.2.

Zbog toga se javlja Kulonova sila koja teži da naelektrisanje vrati u centar. Kolika je ta sila? Ako sa q označimo negativno naelektrisanje u sferi radijusa x tada je tražena sila jednaka interakciji opterećenja q i $Q = +Z|e|$ koja su na medusobnom rastojanju x. Dakle,

$$F = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 x^2} . \qquad (1)$$

q je lako izračunati pošto je poznata gustina negativnog opterećenja ρ:

$$\rho = \frac{Z|e|}{4\pi a^3/3} ; \qquad (2)$$

otuda je

$$q = \rho V = \frac{3Ze}{4\pi a^3} \cdot \frac{4\pi}{3} x^3 ,$$

$$q = Ze \left(\frac{x}{a} \right)^3 . \qquad (3)$$

Zato iz (1) sledi

$$F = \frac{(Ze)^2 x}{4\pi\varepsilon_0 a^3} . \qquad (4)$$

Kulonova sila (4) uravnotežava silu koja izaziva razdvajanje centara pozitivnog i negativno optetećenja

$$F_E = ZeE , \qquad (5)$$

gde je E jačina spoljašnjeg električnog polja. Zato, iz uslova $F = F_E$ sledi

$$\frac{Z^2 e^2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{a^3} = ZeE ,$$

$$x = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{Ze} E . \qquad (6)$$

Shodno našem modelu pojave, možemo reći da polje E indukuje u atomu dipolni moment

$$p = Zex . \qquad (7)$$

Odavde, s obzirom na (6), imamo

$$p = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E . \qquad (8)$$

Vidimo da je $p \propto \varepsilon_0 E$. Koeficijent proporcionalnosti, koji je po definiciji elektronska polarizabilnost (videti udžbenik jednačina 46.1) direktno sledi iz (8):

$$\beta = 4\pi a^3 . \qquad (9)$$

Za a= $6,5\cdot 10^{-11}$m odavde nalazimo

$$\beta = 4\pi (6,5\cdot 10^{-11})^3 \ m^3 ,$$

$$\beta = 3,45\cdot 10^{-30} m^3 .$$

Pitanja i komentari

Da li izraz (1) važi bez ograničenja ili samo za malo x? Zadatak smo rešavali pod pretpostavkom da je ρ konstanta. Pokušajte da rešite zadatak ako ρ zavisi od radijalne koordinate, $\rho = \rho(r)$, $0 \le r \le R$. Šta biva ako je, konkretno, $\rho(r)$ linearna funkcija? Neki autori radije definišu elektronsku polarizabilnost na sledeći način

dipolni moment = $\beta\cdot$jačina električnog polja.

Izračunajte β na ovaj način, umesto pomoću jednačine (9).

5.2.) Poznato je da molekul vode ima stalni dipolni moment $p_0 = 6,2\cdot 10^{-30}$ Cm. Na sobnoj temperaturi i pritisku 10^5Pa, $1 m^3$ vode sadrži $n = 2,65\cdot 10^{25}$ molekula. Izračunati intenzitet vektora polarizacije, ako je srednje, makroskopsko, električno polje jačine $E = 1,18\cdot 10^3$ V/m.

Rešenje:

Ekvivalentna elektronska polarizabilnost β_{ekv} izračunava se iz relacije (udžbenik, jednačina 48.1).

$$\beta_{ekv} = \frac{p_0^2}{3\varepsilon_0 kT} . \qquad (1)$$

Dipolni moment jedinice zapremine je onda

$$P = n\,\beta_{ekv}\varepsilon_0 E' , \qquad (2)$$

gde je E' lokalno električno polje . Ako E' možemo izračunavati pod okolnostima koje se smatraju postojećim kad se izvodi formula Klauzijusa-Mosotija, biće

$$E' \approx E + \frac{P}{3\varepsilon_0} , \qquad (3)$$

pa iz (2) sledi

$$P = n\beta_{ekv}\varepsilon_0 \left(E + \frac{P}{3\varepsilon_0}\right) ,$$

$$P = \frac{n\beta_{ekv}\varepsilon_0}{1 - \frac{n}{3}\beta_{ekv}} E . \qquad (4)$$

Izračunajmo prvo β_{ekv}:

$$\beta_{ekv} = \frac{(6,2\cdot 10^{-30})^2 \ m^3}{3\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\cdot 1,34\cdot 10^{-23}\cdot 300} ,$$

$$\beta_{ekv} = 3,6\cdot 10^{-28} m^3 .$$

Sada iz (4) nalazimo

$$P = \frac{2,65\cdot 10^{25}\cdot 3,6\cdot 10^{-28}\cdot 8,85\cdot 10^{-12}}{1 - \frac{1}{3}\, 2,65\cdot 10^{25}\cdot 3,6\cdot 10^{-28}}\cdot 1,18\cdot 10^3 \ \frac{C}{m^2} ,$$

$$P = 8,47\cdot 10^{-14}\cdot 1,18\cdot 10^3 \ \frac{C}{m^2} ,$$

$$P = 10^{-10} C/m^2 .$$

Pitanja i komentari

Izračunajte grešku koju bismo učinili da smo od početka radili uz aproksimaciju $E' \approx E$.

Naći jačinu polja koje bi obezbedilo da se u atomu iz prethodnog zadatka indukuje dipolni moment jednak stalnom dipolnom momentu molekula vode (Odgovor: $E \approx 2\cdot 10^{11}$ V/m). Da li pri tako velikim E uopšte važe linearne relacije sa kojim radimo?

5.3.) Za helijum na temperaturi t = 0°C i pritisku p = 10^5 Pa naći:

a) Elektronsku polarizabilnost,

b) Dielektričnu propustljivost.

Rešenje:

Elektronsku polarizabilnost možemo proceniti na zadovoljavajući način koristeći rezultat zadatka 5.1. Tamo smo obrazložili da je

$$\beta = 4\pi a^3 , \qquad (1)$$

gde je a poluprečnik atoma (uslovno definisan kao poluprečnik sfere u kojoj je raspoređeno negativno opterećenje). Za helijum je $a = 6\cdot 10^{-11}$m. Ako je poznato β, dielektrična propustljivost ε se nalazi iz formule (Udžbenik, jednačina 47.1):

$$\varepsilon = 1 + n\beta , \qquad (2)$$

gde je n koncentracija atoma u gasu. Za datu temperaturu i pritisak, koncentracija helijuma će biti $n = 2,65\cdot 10^{25}$atoma /m³. Zamenom u (1) dobijamo:

$$\beta = 4\pi\cdot 6^3\cdot 10^{-33} m^3 ,$$

$$\beta = 2,7\cdot 10^{-30} m^3 .$$

Kako je

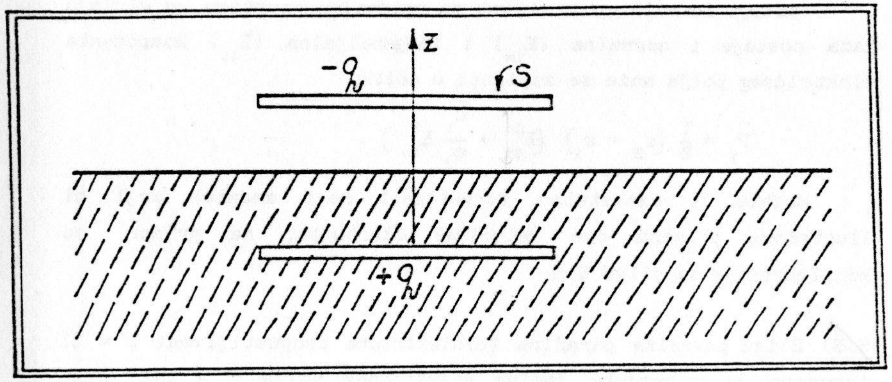
$$n\beta = 2,65\cdot 10^{25}\cdot 2,7\cdot 10^{-30} = 7,19\cdot 10^{-5} ,$$

iz (2) sledi:

$$\varepsilon = 1,00007 .$$

5.4.) Ravanski kondenzator čije su obloge naelektrisane, postavljen je tako da se obloga koja nosi opterećenje +q nalazi u tečnom dielektriku dielektrične propustljivosti ε, dok je druga obloga, sa opterećenjem −q, u vazduhu (sl.5.3.). Površine obloga S su poznate.

Odrediti silu koja deluje na površinu tečnosti. Na kraju zameniti ove posebne vrednosti: $q = 4\cdot 10^{-7}$C, $S = 340$ cm², $\varepsilon = 2$.



Sl.5.3.

Rešenje:

U električnom polju ravanskog kondenzatora javljaju se na površini tečnosti polarizaciona opterećenja. Obloge kondenzatora deluju na ovo opterećenje nekom sumarnom silom F. Zamislimo da se pod dejstvom ove sile površina tečnosti može pomeriti za dužinu dz. Izvršeni rad bi bio

$$\delta A = Fdz \quad .$$

Pritom, u vazduhu bi se smanjila energija električnog polja za iznos

$$dW_1 = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1 E_1^2 S d\tau \quad ,$$

gde je ε_0 = električna konstanta, E_1 jačina električnog polja u vazduhu, a

$$d\tau = Sdz$$

promena zapremine vazdušnog dela kondenzatora. S druge strane povećava se energija električnog polja u tečnosti za iznos

$$dW_2 = +\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon E_2^2 S\, dz,$$

gde je E_2 jačina električnog polja u tečnosti. Prema zakonu održanja energije mora biti

$$\delta A + (dW_1 + dW_2) = 0,$$

$$Fdz - \frac{1}{2}\varepsilon_0 S(E_1^2 - E_2^2) = 0 \ ,$$

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S E_1^2(1 - \varepsilon E_2^2 / E_1^2) \ .$$

Pošto je na razdvojnoj površini

$$E_1 = \varepsilon E_2 \ ,$$

odavde imamo

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 S E_1^2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) .$$

Kako je $E_1 = \dfrac{q}{\varepsilon_0 S}$, imamo definitivno

$$F = \frac{1}{2}\frac{q^2}{S\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) .$$

Zamenimo posebne vrednosti:

$$F = \frac{1}{2}\,\frac{4^2\cdot 10^{-14}C^2}{340\cdot 10^{-4}m^2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}\frac{F}{m}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \ ,$$

$$F \simeq 8\,\frac{10^2}{3000}\,\frac{1}{2}\ N \ ,$$

$$F = 0,13\ N \ .$$

<u>Pitanja i komentari</u>

Izraz za silu izveli smo uz aproksimaciju da je dielektrična propustljivost vazduha jednaka jedinici. Bez teškoća se može uopštiti postupak i naći sila u slučaju da je iznad dielektrika dielektrične propustljivosti ε_2 neki dielektrik čija je dielektrična propustljivost ε_1. Formula glasi

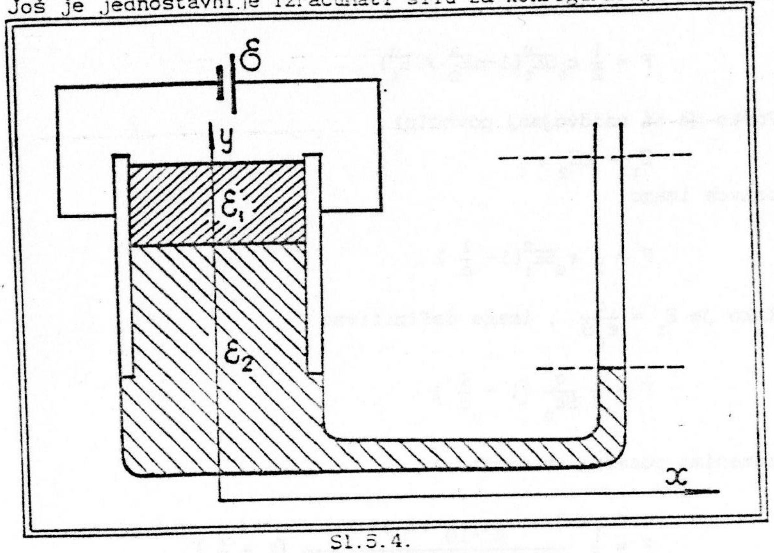
$$F = \frac{S}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_1^2 \quad ,$$

ili, što je isto,

$$F = \frac{1}{2}\frac{q^2}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}\right) .$$

Pokušajte da dobijete ovaj izraz samostalno.

Još je jednostavnije izračunati silu za konfiguraciju sa sl.5.4.

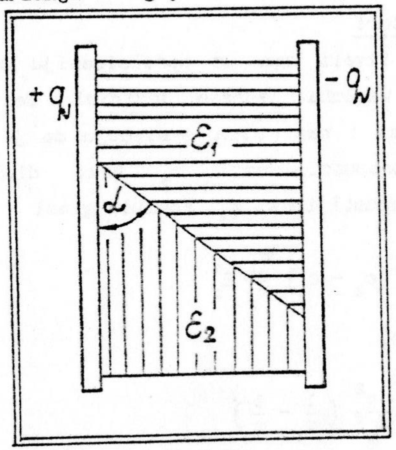


Sl.5.4.

Ako je E_1 jačina električnog polja u dielektriku, bice

$$F_y = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)E_1^2$$

sila na površini koja razdvaja dva dielektrika. Možete li primeniti zakon održanja energije da opravdate i ovaj izraz?



Sl.5.5.

Opštija formula za pritisak na razdvojnu površinu, u slučaju kada postoje i normalna (E_{1n}) i tangencijalna (E_{1t}) komponenta električnog polja može se zapisati u obliku

$$P_y = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)\left(E_{1t}^2 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{1n}^2\right).$$

Možete li samostalno formulisati neki zadatak koji bi ilustrovao primenu ove relacije? Startujte, na primer, od konfiguracije sa slike 5.5.

5.5) Blizu površine parafina (dielektrična propustljivost $\varepsilon = 2$) izmerena je u vazduhu jačina električnog polja $E = 1437$ V/m. Ustanovljeno je da pravac vektora $\vec{E}$ na tom mestu zaklapa ugao $\alpha_2 = 34^\circ$ sa normalom na površinu parafina.

a) Pod kojim uglom prema normali je nagnuta odgovarajuća linija sile u parafinu?

b) Odrediti jačinu električnog polja u parafinu

Rešenje:

Iz formule (Udžbenik, jednaina 43.1.)

$$\frac{tg\alpha_2}{tg\alpha_1} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$$

nalazimo odmah izraz iz koga je moguće naći α_1, pa je traženi ugao

$$tg\alpha_1 = \varepsilon_1 tg\alpha_2 \qquad (\varepsilon_2 \approx 1,\ \text{vazduh}).$$

Kako je $\varepsilon_1 = 2$ i $\alpha_2 = 34^\circ$, dobijamo:

$$tg\alpha_1 = 2\cdot 0,6745 = 1,3490,$$

$$\alpha_1 = 53,45^\circ.$$

Iz graničnog uslova (Udžbenik, jednačina 41.3.)

$$\varepsilon_1 E_{1n} = E_{2n}$$

nalazimo nepoznato polje E_1:

$$\varepsilon_1 E_1 \cos\alpha_1 = E_2 \cos\alpha_2 \ ,$$

$$E_1 = \frac{1}{\varepsilon_1} E_2 \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1} \ .$$

Zamenom brojnih vrednosti dobijamo:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot 1437 \frac{V}{m} \frac{\cos 34^\circ}{\cos 53,45^\circ} \ .$$

$$E_1 \simeq 10^3 \ \frac{V}{m} \ .$$

Pitanja i komentari

Skok u vrednosti normalne komponente jačine električnog polja na graničnoj površini vazduh/parafin izazvan je polarizacionim opterećenjima. Instruktivno je i njima se pozabaviti u zadacima ovog tipa. Izračunajmo gustinu polarizacionih opterećenja:

$$\sigma' = \varepsilon_0 (E_{2n} - \varepsilon_{1n}) \ ,$$

$$= \varepsilon_0 \ (E_2 \cos\alpha_2 - E_1 \mathrm{sos}\alpha_1) \ ,$$

$$= 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \left(1437 \ \frac{V}{m} \cos 34^\circ - 1000 \ \frac{V}{m} \cos 53,45^\circ\right) =$$

$$= 5,26 \cdot 10^{-9} \ \frac{C}{m^2} \ .$$

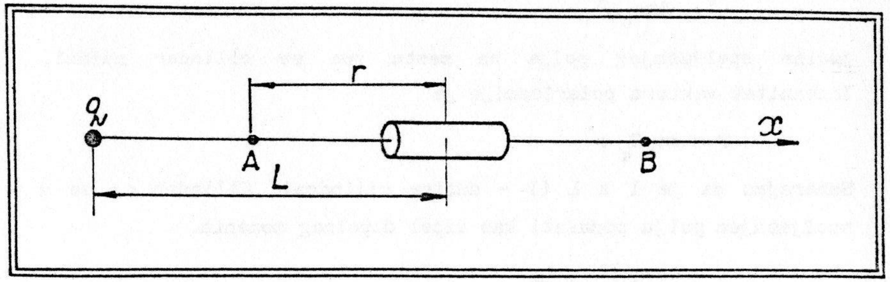
Neke inače kvalitetne zbirke zadataka daju rešenja u jedinicama apsolutnog elektrostatičkog ili nekog drugog sistema. Potrebno je znati da se takva vrednost preračuna u SI sistem. Vežbe radi, izračunajte σ' u jedinicama apsolutnog elektrostatičkog sistema ($1C = 3 \cdot 10^{10}$StatC). Rezultat je

$$\sigma' = 1,578 \cdot 10^{10} \ \frac{StatC}{cm^2} \ .$$

5.6.) Na udaljenosti L od tačkastog naelektrisanja q postavljen je cilindar od dielektričnog materijala dielektrične susceptibilnosti α, sl. 5.6. Zapremina cilindra je τ.

Da li prisustvo dielektrika menja jačinu električnog polja E u nekoj tački A koja se nalazi između tačkastog naelektrisanja i

cilindra? Na koji način menja? Smanjuje li se E ili povećava? A šta je sa tačkom B lociranom s druge strane cilindra?

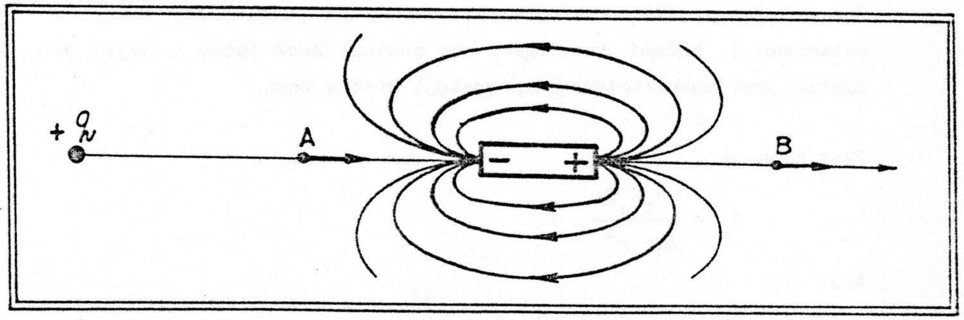


Sl.5.6.

Posle kvalitativnih odgovora na postavljena pitanja, pokušajte da računom potvrdite razmatranja. Uzeti pri tom da je $\alpha = 2 \ \mathrm{i} \ \tau/\pi r^3 = 10^{-5}$.

Rešenje:

Cilindar se nalazi u električnom polju tačkastog naelektrisanja. On će se polarisati, preobraćajući se u električni dipol. Ako nacrtamo linije sile dipola (sl. 5.7.)



Sl. 5.7.

vidimo da će ovo polje pojačavati polje naelektrisanja q, kako u tački A, tako i u tački B.

Ako prihvatimo ovaj model dipola za opisanu pojavu, možemo dati i približni matematički tretman. Neka je

$$E_q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 L^2}$$

jačina spoljašnjeg polja na mestu gde se cilindar nalazi. Intenzitet vektora polarizacije je

$$P = \alpha\varepsilon_0 E_q .$$

Smatrajmo da je $l \ll L$ (l - dužina cilindra). Cilindar će se u spoljašnjem polju ponašati kao dipol dipolnog momenta.

$$p = q' \cdot l = \sigma' \cdot Sl ,$$

gde su $+ q'$ i $- q'$ polarizaciona opterećenja (σ' - njihova gustina) smeštena na bazama cilindra površine S. Sada možemo koristiti poznati izraz za jačinu električnog polja dipola (Udžbenik, jednačina 25.7)

$$E_\alpha = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

u koji ćemo uneti podatke $\theta = 0$ ili π. Dakle:

$$E_\alpha = \frac{\sigma' Sl}{2\pi\varepsilon_0 r^3} .$$

Pod učinjenim pretpostavkama, smatraćemo da je cilindar homogeno polarisan i, budući da njegova osa prolazi kroz tačku u kojoj je postavljeno naelektrisanje q, postoji prosta veza

$$\sigma' = P .$$

Zbog toga je

$$E_\alpha = \frac{\alpha\varepsilon_0 E_q Sl}{2\pi\varepsilon_0 r^3} ,$$

t.j.

$$\frac{E_\alpha}{E_q} = \frac{\alpha\tau}{2\pi r^3} .$$

Odavde nalazimo:

$$\frac{E_\alpha}{E_q} = \frac{(3 - 1)}{2} \cdot 10^{-5} ,$$

$$\frac{E_\alpha}{E_q} = 10^{-5} .$$

Iako neznatno, vidimo da dipolno polje povećava jačinu električnog polja u tački A. Sličan zaključak važi naravno i za tačku B.

Pitanja i komentari

Ovaj instruktivni primer pominje I.Tam (FUNDAMENTALS OF THE THEORY OF ELECTRICITY, Mir Pulichers, Moscow 1979) da bi ilustrovao razliku u tretmanu beskonačnog i ograničenog dielektrika. Konkretno, Puasonova jednačina

$$\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

pokazuje da je jačina električnog polja, za datu raspodelu slobodnih opterećenja ρ u homogenom dielektriku, ε puta manja od vrednosti u vakuumu. A ovaj zadatak pokazuje da kada se radi o ograničenom dielektriku može da nastane upravo obrnut slučaj: prisustvo ograničenog dielektrika povećavalo je polje u vakuumu.

Postoje li na osi x (sl. 5.4) oblasti gde dielektrik smanjuje polje tačkastog naelektrisanja?

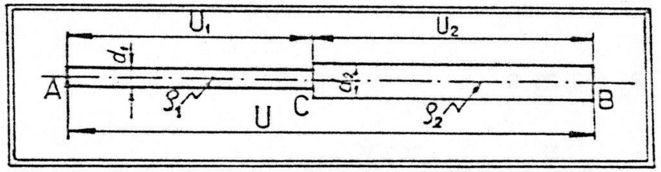
6. KONSTANTE JEDNOSMERNE STRUJE

6.1.) Dve žice, debljine d_1 i d_2 dužine l_1 i l_2 vezane su na red. Na krajevima te kombinacije deluje napon U.

a) Naći napone koji deluju na krajevima obe žice, ako su poznate specifične otpornosti materijala žica, ρ_1 i ρ_2.
b) Izračunati te napone ako je $U = 100$ V, $d_1 = 1$m, $d_2 = 1{,}5$ m, $l_1 = 10$m, $l_2 = 20$ m, $\rho_1 = 2\cdot10^{-8}$ Ωm i $\rho_2 = 20\cdot10^{-8}$ Ωm.

Rešenje:

a) Obeležimo sa R_1 otpornost prve žice (sl. 6.1.)



Sl. 6.1.

ona iznosi (Udžbenik, relacija 59.1)

$$R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S_1} \quad , \; S_1 = \pi\left(\frac{d_1}{2}\right)^2$$ - površina poprečnog preseka žice

Slično, biće i za drugu žicu:

$$R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S_2} \quad , \qquad S_2 = \pi\left(\frac{d_2}{2}\right)^2.$$

Ukupna otpornost između tačaka A i B iznosiće (redna veza)

$$R = R_1 + R_2$$

Kroz žice teče struja jačine I:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U}{R_1 + R_2} .$$

Tražene napone U_1 i U_2 onda nalazimo primenog Omovog zakona

$$U_1 = R_1 I \quad , \quad U_2 = R_2 I$$

$$U_1 = R_1 \frac{U}{R_1 + R_2} \quad , \quad U_2 = R_2 \frac{U}{R_1 + R_2} .$$

b) Shodno datim podacima, biće redom:

$$R_1 = 4\rho_1 \frac{l_1}{\pi d_1^2} = 4\cdot 2\cdot 10^{-8}\Omega m \frac{10 \text{ m}}{\pi (10^{-3})^2 m^2} ,$$

$$R_1 = 0,255 \ \Omega .$$

$$R_2 = 4\rho_2 \frac{l_2}{\pi d_2^2} = 4\cdot 20\cdot 10^{-8}\Omega m \frac{20 \text{ m}}{\pi (1,5\cdot 10^{-3})^2 m^2} ,$$

$$R_2 = 2,26 \ \Omega .$$

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{100 \text{ V}}{(0,26 + 2,26)\Omega} ,$$

$$I = 39,71 \text{ A} .$$

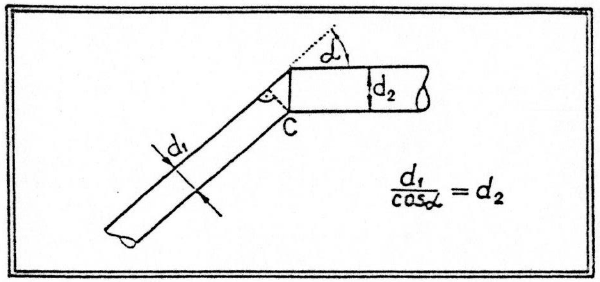
Na kraju nalazimo:

$$U_1 = 10,12 \text{ V} ,$$

$$U_2 = 89,88 \text{ V} .$$

Pitanja i komentari

Žice nisu iste debljine. Na spoju C (sl.6.1) imamo izvesnu neregularnost spoja; unosi li ona ikakvu grešku u naš proračun? Može li se problem zaobići ako se predloži da se spoj izvede kao na sl. 6.2?



Sl.6.2.

6.2) a) Kolika količina opterećenja prođe kroz provodnik ako, počev od trenutka t = 0 struja počne eksponencijalno da opada od neke vrednosti I_0 do nule?

b) Izračunati proteklu količinu opterećenja ako je I_0 = 1 A, a u početnom trenutku je brzina opadanja struje bila $\frac{\Delta i}{\Delta t}$ = 0,2 A/s.

Rešenje:

a) Vremenska zavisnost struje izgleda ovako

$$i = I_0 e^{-\alpha t} , \qquad (1)$$

gde je α neka konstanta od koje zavisi brzina opadanja intenziteta struje. Za količinu opterećenja imamo

$$q = \int_0^\infty i dt ,$$

$$q = \int_0^\infty I_0 e^{-\alpha t} dt ,$$

$$q = \frac{I_0}{\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_\infty^0 ,$$

$$q = \frac{I_0}{\alpha} (1 - 0) ,$$

$$q = \frac{I_0}{\alpha} \ . \qquad (2)$$

b) Iz relacije (1) nalazimo:

$$\left|\frac{di}{dt}\right| = \alpha I_0 e^{-\alpha t} \ ,$$

$$\left|\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = \alpha I_0 \ .$$

Odavde je

$$\alpha = \frac{\left|\frac{di}{dt}\right|_{t=0}}{I_0} \ .$$

Pošto je $\left|\frac{di}{dt}\right|_{t=0} \simeq \frac{\Delta i}{\Delta t} = 0,2 \ \frac{A}{s}$, biće:

$$\alpha \simeq \frac{0,2 \ A/s}{1A} = 0,2 \ \frac{1}{s} \ .$$

Prema relaciji (2), biće definitivno

$$q = \frac{1A}{0,2 \ \frac{1}{s}} \ ,$$

$$q = \frac{1}{0,2} \ As \ ,$$

$$q = 5 \ C \ .$$

6.3.) Napon na krajevima provodnika otpornosti r linearno raste za vreme τ od početne vrednosti U_1 do krajnje vrednosti U_2.
a) Koja količina opterećenja protekne provodnikom u toku tog procesa? b) Izračunati tu količinu opterećenja ako je $U_1 = 100$ V, $U_2 = 200$ V, $r = 100 \ \Omega$, $\tau = 10$s.

Rešenje:

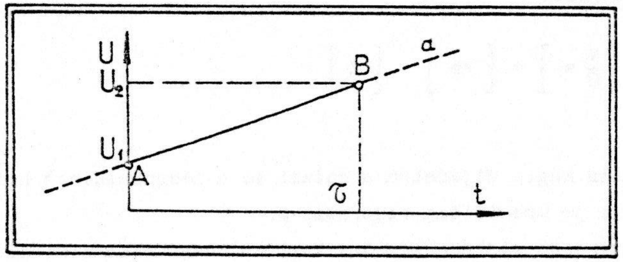
a) Količinu opterećenja nalazimo uobičajnim postupkom

$$q = \int_0^{\tau} i \ dt \ . \qquad (1)$$

Intenzitet struje i određujemo primenom Omovog zakona:

$$i = \frac{U}{r} \ .$$

Potrebno je naći vremensku zavisnost napona. Prema uslovima zadatka, rast napona je linearna funkcija vremena data na sl.6.3.



Sl.6.3.

Jednačinu prave a je moguće naći bez teškoća, pošto su poznate dve tačke kroz koje prava prolazi. To su tačke $A(0, U_1)$ i $B(\tau, U_2)$.
Dakle:

$$U = \frac{U_2 - U_1}{\tau} t + U_1 \ .$$

Prema tome, za intenzitet struje dobijamo

$$i = \frac{U_2 - U_1}{\tau r} t + \frac{U_1}{r} \ .$$

Sada smo spremni da pristupimo rešavanju integrala (1):

$$q = \int_0^{\tau} \left[\frac{U_2 - U_1}{\tau r} t + \frac{U_1}{r} \right] dt \ ,$$

$$q = \frac{U_2 - U_1}{\tau r} \int_0^{\tau} t dt + \frac{U_1}{r} \int_0^{\tau} dt \ ,$$

$$q = \frac{U_2 - U_1}{r}\frac{\tau}{2} + \frac{U_1}{r}\tau .$$

b)

$$q = \frac{100\ \mathrm{V}}{100\ \Omega}\ \frac{10\ \mathrm{s}}{2} + \frac{100\ \mathrm{V}}{100\ \Omega}\ 10\ \mathrm{s} ,$$

$$q = 5\mathrm{C} + 10\mathrm{C} ,$$

$$q = 15\mathrm{C} .$$

Analiza jedinica:

$$\left[\frac{\mathrm{V}}{\Omega}\mathrm{s}\right] = \left[\mathrm{As}\right] = \left[\mathrm{C}\right] .$$

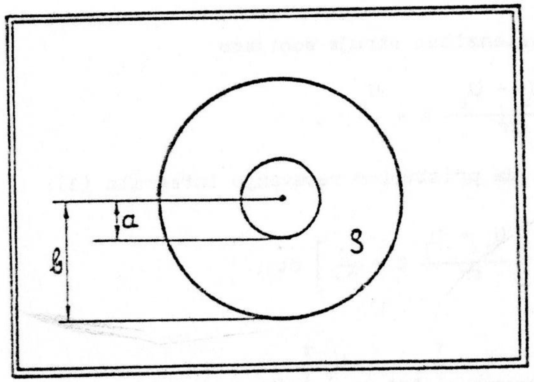
6.4.) Metalna kugla dijametra d nalazi se u neograničenoj homogenoj sredini čija je specifična otpornost ρ.

a) Naći otpornost sistema metalna kugla - neograničena sredina.

b) Zameniti ove posebne vrednosti: $d = 50$ cm, $\rho \approx 3\cdot 10^2\ \Omega\mathrm{m}$.

Rešenje:

a) U kursevima iz elektromagnetizma rešava se i jedan ovakav zadatak. Dat je sferni kondenzator (poluprečnici a i b, videti sl. 6.4.)



Sl. 6.4.

koji između obloga ima neku homogenu sredinu čija je specifična otpornost ρ. Traži se otpornost ovog sistema, tj. količnik napona na oblogama i struje koja teče kroz kondenzator. Rešenje je (videti, Udžbenik, izlaganje u §61, Omov zakon u diferencijalnoj formi; strana 118)

$$R = \frac{\rho}{4\pi}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) . \qquad (1)$$

Da bi se formula (1) primenila u našem zadatku, treba uzeti da je $a = \frac{d}{2}$ i posmatrati granični proces $\lim\limits_{b\to\infty} R$. Na taj način, iz (1) odmah nalazimo

$$R_\infty = \frac{\rho}{4\pi}\ \frac{1}{d/2} ,$$

$$R_\infty = \frac{\rho}{2\pi d} . \qquad (2)$$

b)

$$R_\infty = \frac{3\cdot 10^2\ \Omega\mathrm{m}}{1\mathrm{m}\cdot 3,14} ,$$

$$R_\infty = 95,54\ \Omega ,$$

$$R_\infty \approx 100\ \Omega .$$

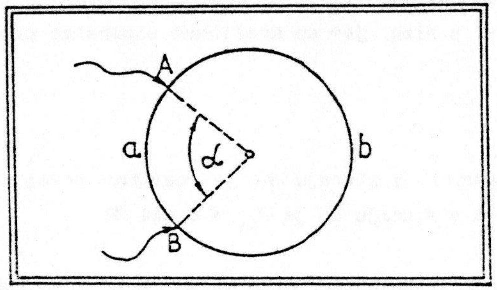
Pitanja i komentari

Ovo je, u stvari, zadatak o nalaženju otpornosti uzemljenja. O ovom zanimljivom i praktično važnom delu elektrotehnike vredi pročitati bar ono osnovno (videti Udžbenik, strana 123). Zainteresovanima preporučujemo i upoznavanje sa problemima zaštite od električnog udara, što može biti u uskoj vezi sa problemima uzemljavanja električnih potrošača (na primer, knjiga M. T. Turkmenov, Električeskoe poraženie, FRUNZE, "Kirgistan ", 1982.

6.5.) Od žice konstantnog poprečnog preseka, koja ima specifičnu otpornost ρ, dužine l i površine poprečnog preseka S, napravljen je prsten (videti sl. 6.5.).

a) Ako je za tačku A spojen jedan kraj ommetra, a za tačku B drugi kraj (položaj tačaka definisani su uglom α), odrediti ugao α tako da ekvivalentna otpornost prstena bude jednaka R.

b) Izračunati α ako je R šest puta manje od otpornosti žice od koje je napravljen prsten.



Sl.6.5.

Rešenje:

Nađimo prvo otpornost celog prstena:

$$r = \rho \frac{l}{S} \qquad (1)$$

(po formuli za nalaženje otpornosti žica, Udžbenik, jednačina 59.1, strana 115). Sa r_1 obeležimo otpornost dela prstena od tačke A do tačke B duž puta AaB. Tada je, po formuli za ekvivalentnu otpornost dva paralelno vezana otpornika

$$R = \frac{r_1 (r - r_1)}{r} .$$

Odavde je:

$$r_1^2 - rr_1 + Rr = 0 ,$$

$$r_1 = \frac{r \pm \sqrt{r^2 - 4Rr}}{2} .$$

Pošto je, očigledno, $r_1/\alpha = r/2\pi$, biće

$$\alpha = \frac{2\pi}{r} r_1 ,$$

$$\alpha = \pi (1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{R}{r}}) ,$$

$$\alpha = \pi (1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{SR}{\rho l}}) . \qquad (2)$$

b) $$\alpha = \pi (1 \pm \sqrt{1 - 4\frac{r}{6r}}) ,$$

$$\alpha = \pi (1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}}) ,$$

$$\alpha = \pi (1 \pm \frac{1}{\sqrt{3}}) .$$

Pitanja i komentari

Koji je smisao znakova ± u rešenju (2)? Nacrtati krug i na krugu dati geometrijsku interpretaciju dva rešenja.

Prema relaciji (2), ne postoji takvo α da je $R > r/4$. Vidite li zašto važi to ograničenje?

Nacrtajte kvalitativno tok funkcije $R = f(\alpha)$.

6.6.) Posmatrajmo skup od deset otpornika otpornosti 1Ω. Međutim, jedan od njih je, zbog nekog kvara, u kratkom spoju. Može li se iz dva merenja, pomoću preciznog ommetra, ustanoviti koji je taj otpornik sa nultom otpornošću? Dozvoljeno je, pre merenja, aranžirati otpornike (redno, paralelno, mešovito) prema želji. Kako postupiti?

Rešenje:

Vežimo 10 otpornika prema šemi na sl.6.6.

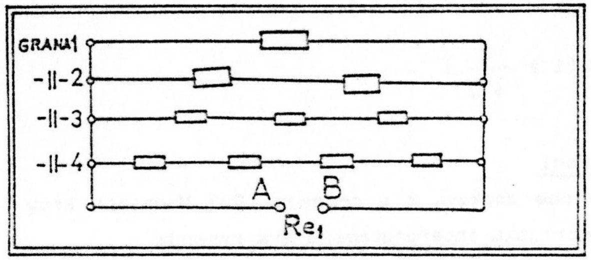
Izmerimo instrumentom ekvivalentnu otpornost R_{el} između tačaka A i B. Može da nastane jedan od ova četiri slučaja:

a) $R_{el} = 0$ otpornik 0Ω je u grani 1;

b) $R_{el} = \frac{1\Omega}{1/1 + 1/1 + 1/3 + 1/4} \approx 0{,}387\ \Omega$, u grani 2;

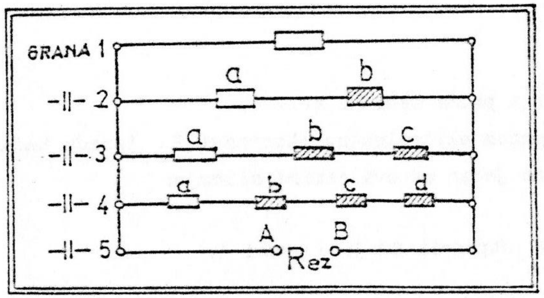
c) $R_{e1} = \dfrac{1\Omega}{1/1 + 1/2 + 1/2 + 1/4} \approx 0{,}444\ \Omega$, u grani 3;

d) $R_{e1} = \dfrac{1\Omega}{1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/3} \approx 0{,}462\ \Omega$, u grani 4.



Sl.6.6.

Najkomplikovaniji je slučaj d), pa pogledajmo kako tada izvršiti drugo merenje. Jasno je, u tom slučaju, da su otpornici iz prve tri grane pouzdano svi sa otpornošću 1Ω. Obeležimo ih na neki način, na primer šrafiranjem, i napravimo šemu otpornika sličnu šemi iz prvog merenja, sl.6.7:



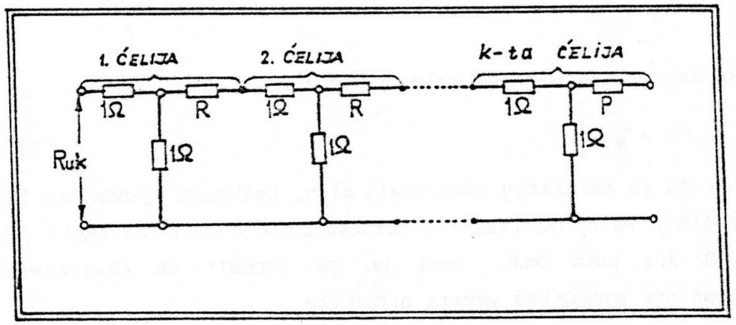
Sl.6.7.

Izmerimo sada (to je drugo merenje) ekvivalentnu otpornost između tačaka A i B. Instrument će pokazati jednu od ovih mogućnosti: 0Ω; 0,387Ω; 0,444Ω; 0,462Ω. Ako pokaže 0Ω, u kratkom je spoju otpornik u grani 1. Ako pokaže 0,387Ω, traženi otpornik je otpornik u grani 2 (jer je b proveren u prvom merenju). Ista logika važi i za grane 3 i 4, kada je respektivno R_{e2} = 0,444Ω i 0,462Ω, a traženi otpornik je onaj prvi u nizu, jer su šrafirani otpornici provereni u prvom merenju.

Pitanja i komentari

Kako biste postupili u slučaju da je rezultat prvog merenja R_{e1} = 0,387 Ω, a kako u slučaju da je R_{e1} = 0,444 Ω?

6.7.) Analizirati ulaznu otpornost kola sa sl. 6.8. u slučaju kada broj ćelija teži beskonačnosti. Posebno obraditi slučajeve:
a) R = 0, b) R = 1Ω.

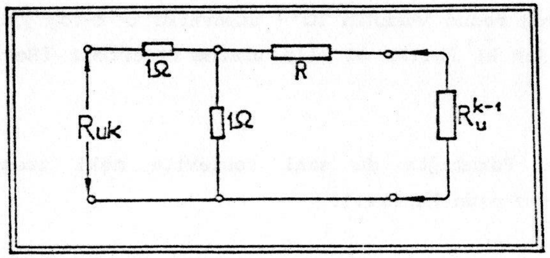


Sl.6.8.

Rešenje:

Označimo sa R_n^{k-1} ulaznu otpornost (otpornost između tačaka 1 i 2) kada se kolo sastoji od k-1 ćelija. Ako dodamo još jednu, k-tu ćeliju, ta otpornost će biti R_n^k . Pri tom, očigledno, važi šema data na sl.6.9 .
Odavde lako ustanovljavamo vezu između R_n^k i R_n^{k-1}

$$R_n^k = 1\Omega + \frac{1\Omega(R + R_n^{k-1})}{1\Omega + R + R_n^{k-1}} .$$



Sl.6.9.

U zadatku se traži ulazna otpornost kad $k \to \infty$, tj. R_n^{∞}. Pošto je

$$\lim_{k\to\infty} R_n^k = R_n^{\infty} \quad \text{i} \quad \lim_{k\to\infty} R_n^{k-1} = R_n^{\infty},$$

biće,

$$R_n^{\infty} = 1\Omega + \frac{R + R_n^{\infty}}{1\Omega + R + R_n^{\infty}} .$$

Odavde lako nalazimo traženu otpornost

$$R_n^{\infty} = \frac{1}{2}\left[1 - R \pm \sqrt{(1 - R)^2 + 4(1 + 2R)} \right]\Omega \qquad (1)$$

(R je ovde brojna vrednost otpornosti, u omima).

a) Ako je $R = 0$, iz (1) proizilazi

$$R_n^{\infty}(o) = \frac{1}{2}\left[1 + \sqrt{5} \right] \Omega .$$

b) Ako je $R = 1\Omega$, dobijamo

$$R_n^{\infty}(1) = \sqrt{3}\ \Omega .$$

Pitanja i komentari

Pokušajte da skicirate zavisnost $R_{\infty} = f(R)$. Budite obazrivi pri izračunavanju $\lim_{R\to\infty} R_{\infty}$. Na primer, nepažljivo bi bilo staviti:

$$\sqrt{(1 - R)^2 + 4(1 + 2R)} \ \overrightarrow{(R \text{ veliko})}\ \sqrt{R^2 + 4(1 + 2R)} \longrightarrow \sqrt{R^2} = R$$

i odmah potom:

$$R_{\infty} \to \frac{1}{2}(1 - R + R)\Omega = \frac{1}{2}\ \Omega , \quad \text{tj.}$$

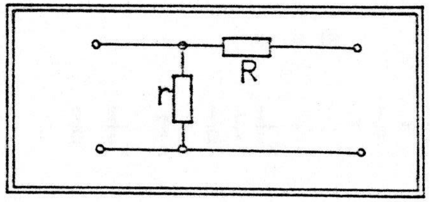
$$\lim_{R\to\infty} R_{\infty} = \frac{1}{2}\ \Omega \qquad \text{(pogrešno).}$$

Ustvari je

$$\lim_{R\to\infty} R_{\infty} = 2 \qquad \text{(dokažite ovo!)}$$

Domaći zadatak:

Slično kao i u ovom zadatku analizirajte kolo sastavljeno od ovakvih elemenata kao na sl. 6.10.



Sl.6.10.

Pokažite da je

$$R_{\infty} = \frac{1}{2}\ (- R + \sqrt{R^2 + 4rR}\ ).$$

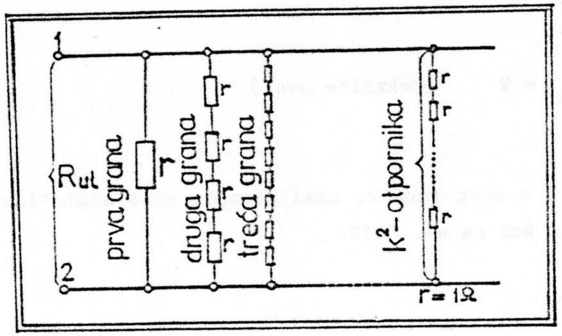
Takođe skicirajte grafik $R_{\infty} = f(R)$. Pokušajte da i sami sastavite neki zadatak slične tematike.

6.8.) a) Naći ulaznu otpornost (ekvivalentnu otpornost između tačaka 1 i 2) za kolo sa sl. 6.11 ako je $r = 1\Omega$.

b) Zadržava li ulazna otpornost konačnu vrednost kad se broj grana neograničeno povećava?

Rešenje:

a) U nekoj od grana imamo rednu vezu otpornika dok su same grane paralelno vezane. Prema tome je



Sl.6.11.

$$\frac{1}{R_u} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{k^2} \right) \frac{1}{\Omega} = \sum_k \frac{1}{k^2} \frac{1}{\Omega} \; ,$$

$$R_u = \frac{1}{\sum\limits_k \frac{1}{k^2}} \, \Omega \, .$$

b)

$$R_u^{\infty} = \lim_{k \to \infty} R_u \quad ,$$

$$R_u^{\infty} = \frac{1}{\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_k \frac{1}{k^2}} \, \Omega = \frac{6}{\pi^2} \, \Omega \, ,$$

pošto je, kao što se zna,

$$\lim_{k \to \infty} \sum_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \, .$$

Ulazna otpornost, dakle, ima graničnu vrednost i ona je, kao što se vidi, u vezi sa brojem π.

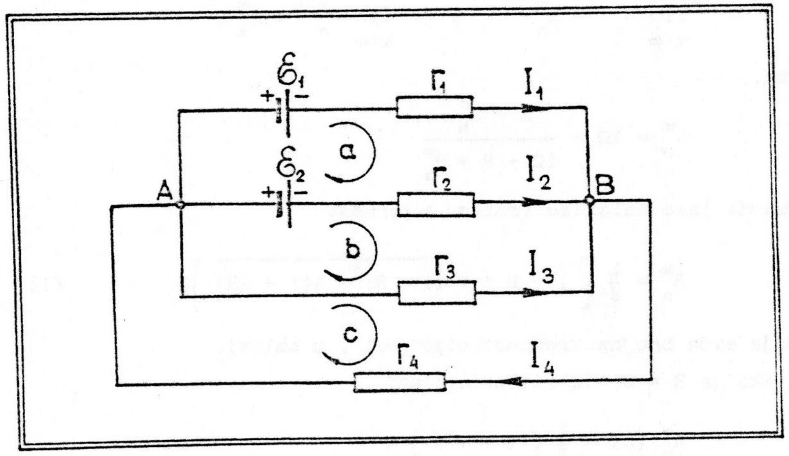
Pitanja i komentari

Koliko bi grana bilo dovoljno uzeti da bi smo postupkom iz prvog zadatka bili u stanju da reprodukujemo broj π sa tačnošću na dve decimale?

Ako bi broj redno vezanih 1Ω - otpornika u k-toj grani bio određen funkcijom k! kolika bi bila ulazna otpornost (Rezultat: $R_u = \frac{1}{e - 1}$).

Domaći zadatak: Pokušajte da sami sastavite neki zadatak po principu koji smo ovde koristili.

6.9.) Strujni izvori e.m.s. $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$, zanemarljivih unutrašnjih otpornosti, vezani su u kolo, kako je pokazano na slici 6.12. Odrediti jačine struja koje teku u granama ovog složenog kola, ako je $\mathcal{E}_1 = 10$ V i $\mathcal{E}_2 = 4$V, a $r_1 = r_4 = 2\Omega$ i $r_2 = r_3 = 4\Omega$.



Sl.6.12.

Rešenje:

Izaberimo smerove struja kako je prikazano na slici. Prema I Kirhofovom pravilu, važiće za čvor B:

$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0 \; . \qquad (1)$$

Da se odrede četiri nepoznate struje, potrebno je formirati još tri nezavisne jednačine. Do njih ćemo doći pomoću II Kirhofovog pravila. Neophodne konture možemo odabrati na više načina. Odlučimo se za konture

a) $A\,\mathcal{E}_1\,r_1\,B\,r_2\,\mathcal{E}_2 A$, b) $A\,\mathcal{E}_2\,r_2\,B\,r_3\,A$ i c) $A\,r_3\,B\,r_4\,A$.

Smerove smo naznačili na slici. Pri odbiru kontura vodili smo računa da u svaku ulazi bar jedna grana samo njoj svojstvena. Sada imamo:

Za konturu a): $I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$, (2)

b): $I_1 r_1 - I_3 r_3 = \mathcal{E}_1$, (3)

c): $I_3 r_3 + I_4 r_4 = 0$. (4)

Ako imamo u vidu konkretne vrednosti otpornosti, možemo ovaj sistem jednačina svesti na oblik

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 - I_4 &= 0 \\ 2I_1 - 4I_2 + 0 + 0 &= 6 \\ 2I_1 + 0 - 4I_3 + 0 &= 10 \\ 0 + 0 + 4I_3 + 2I_4 &= 0 \; . \end{aligned} \qquad (5)$$

Tehnikom determinanti možemo odavde naći tražene struje

$$I_k = \frac{\Delta k}{\Delta} \quad (k = 1,\ 2,\ 3 \text{ i } 4) \; . \qquad (6)$$

Ovde je Δ determinanta sistema jednačina. Determinanta Δ_k se dobija kada se k-ta kolona determinante Δ zameni kolonom slobodnih članova sistema (5). Lako nalazimo da je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 96 \; . \qquad (7)$$

Pošto je

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \; , \qquad (8)$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 2 & 6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -96 \; , \qquad (9)$$

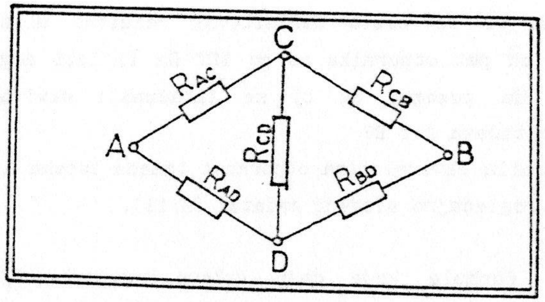
odmah dobijamo:

$$I_2 = \frac{0}{96} = 0 \quad \text{i} \quad I_3 = \frac{-96}{96}\,\text{A} = -1\ \text{A} \; . \qquad (10)$$

Samostalno izračunajte preostale dve struje:

$$I_1 = 3\text{A} \quad \text{i} \quad I_4 = 2\text{A} \; . \qquad (11)$$

6.10) Data je mreža otpornika prikazana na sl. 6.13.



Sl. 6. 13.

a) Naći ekvivalentnu otpornost između tačaka C i D; zadatak završiti uz pretopstavku da su sve otpornosti jedinične.

Rešenje:

a) Potrebno je prvo naći vrednost ekvivalentne otpornosti paralelne veze $R_{CD} \,||\, (R_{AC} + R_{AD})$:

$$R'_e = \frac{R_{CD}(R_{AC} + R_{AD})}{R_{AC} + R_{AD} + R_{CD}} .$$

Nakon toga traženu otpornost R_e moguće je naći izračunavajuci vrednost paralelne veze $R'_e \,||\, (R_{CB} + R_{BD})$:

$$R_e = \frac{R'_e\,(R_{CB} + R_{BD})}{R'_e + R_{CB} + R_{BD}} .$$

Ako su sve otpornosti jednake 1Ω, biće:

$$R_e = \frac{1\cdot 2}{3}\,\Omega = \frac{2}{3}\,\Omega ,$$

$$R_e = \frac{\frac{2}{3}\,(1+1)}{\frac{2}{3} + 1 + 1}\,\Omega \;;\; R_e = \frac{4}{8}\,\Omega = \frac{1}{2}\,\Omega.$$

Pitanja i komentari.

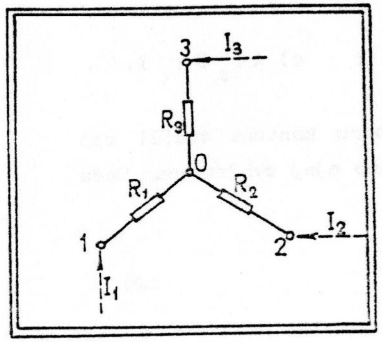
Da li je neophodno koristiti date, relativno složene izraze za R'_e i R_e da bi se dobio definitivni rezultat u slučaju simetrične veze od pet otpornika od po 1Ω? Da li isti argumenti simetrije mogu da pomognu da bi se izračunala ekvivalentna otpornost između tačaka A i B?

Da bi se dobila ekvivalentna otpornost između tačaka A i B u opštem slučaju, pogledajmo sledeći zadatak (6.11).

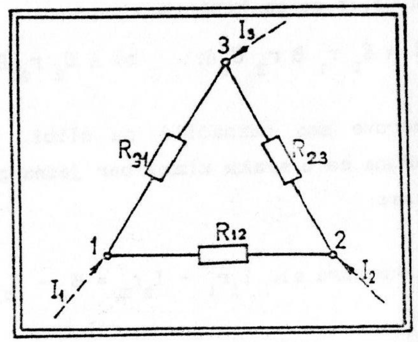
6.11.) Izvesti formule koje daju uslove ekvivalencije veze otpornika po šemi sa sl. 6.14 (veza u zvezdu) i veze otpornika po šemi sa sl. 6.15. (veza u trougao).

a) Koristeci te rezultate, naći ekvivalentnu otpornost (R_e) između tačaka A i B (videti sl.6.13 u prethodnom zadatku).

b) Izraćuanati R_e ako je $R_{AC} = 1\Omega$, $R_{CB} = 2\Omega$, $R_{BD} = 3\Omega$, $R_{AB} = 4\Omega$ i $R_{CD} = 5\Omega$.



Sl.6.14



Sl.6.15

Šema na ovim dvema slikama biće ekvivalentne (u odnosu na ostatak kola kome pripadaju) ako su, u ova dva slučaja, jednaki potencijali čvorova 1,2, i 3, i ne menjaju se pri transformaciji ukupne struje koja utiće u te čvorove. Bez ograničenja opštosti postupka možemo staviti da je potencijal čvora 3, V_3, jednak nuli. Označimo sa V_0, V_1 i V_2 potencijale čvorova 0,1 i 2, a sa I_1, I_2 i I_3 struje koje utiču u čvorove 1,2, i 3 (označene su crticama na datim slikama).

Pogledajmo prvo vezu u zvezdu. Očito je da važe relacije:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_0}{R_1} , \tag{1}$$

$$I_2 = \frac{U_2 - U_0}{R_2} , \tag{2}$$

$$I = \frac{U_3 - U_0}{R_3} = -\,\frac{U_0}{R_3} .$$

Pošto je $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, odavde dobijamo:

$$\frac{U_1}{R_1} - \frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} - \frac{U_0}{R_2} - \frac{U_0}{R_3} = 0\,,$$

$$U_0\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right) = \frac{U_0}{R_2} + \frac{U_2}{R_2}\,,$$

$$U_0 = U_1\frac{G_1}{G} + U_2\frac{G_1}{G}\,, \qquad (3)$$

gde smo radi kraćeg pisanja stavili

$$G_1 = \frac{1}{R_1}\,; \qquad G_2 = \frac{1}{R_2} \quad \text{i} \quad G_0 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\,.$$

Imajući u obzir jednačinu (3) dobijamo iz relacija (1) i (2):

$$I_1 = U_1\left(G_1 - \frac{G_1^2}{G}\right) - U_2\frac{G_1G_2}{G}\,, \qquad (4)$$

$$I_2 = U_1\left(G_2 - \frac{G_2^2}{G}\right) - U_1\frac{G_1G_2}{G}\,. \qquad (5)$$

Analizirajmo sada vezu u trougao. Vidimo da važe sledeće relacije:

$$I_1 = \frac{U_1 - U_2}{R_{12}} + \frac{U_1}{R_{13}}\,,$$

$$I_1 = \frac{U_2 - U_1}{R_{12}} + \frac{U_2}{R_{23}}\,.$$

Njih je moguće predstaviti u obliku:

$$I_1 = U_1(G_{12} + G_{13}) - U_2G_{12}\,, \qquad (6)$$

$$I_2 = U_2(G_{12} + G_{23}) - U_1G_{12}\,, \qquad (7)$$

gde je $G_{12} = 1/R_{12}$, $G_{13} = 1/R_{13}$ i $G_{23} = 1/R_{23}$.

Uporedimo relacije (4) i (5) sa relacijama (6) i (7). Vidimo da mora biti:

$$G_{12} + G_{13} = G_1 - \frac{G_1^2}{G_0}\,,$$

$$G_{12} = G_1G_2/G_0\,,$$

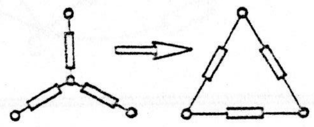
$$G_{12} + G_{23} = G_2 - \frac{G_2^2}{G_0}\,.$$

Ovaj sistem tri jednačine sa tri nepoznate (ostale tri veličine su, po pretpostavci, poznate) može se relativno prosto rešiti. Rezultat je:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}$$

$$R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1R_3}{R_2}$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}$$



(8)

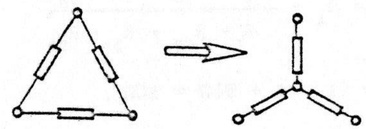
Pomoću ovih formula možemo naći otpornost u granama trougla koji je ekvivalentan datoj zvezdi, ako su otpornosti šeme u zvezdi poznate.

Takođe, može se izvršiti i transformacija truogla u zvezdu, pri tome možemo koristiti sledeće formule (koje je moguće dobiti iz sistema (8))

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R}$$

$$R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R}$$

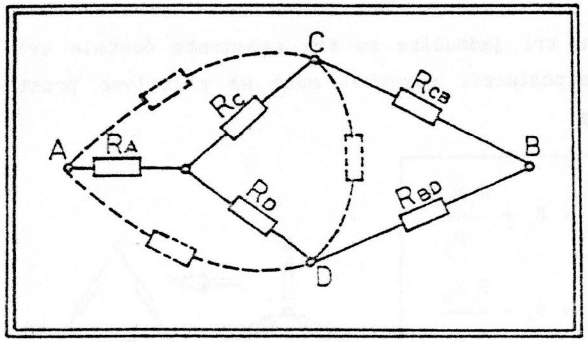
$$R_1 = \frac{R_{13}R_{23}}{R}$$



(9)

gde smo označili $R = R_{12} + R_{23} + R_{13}$.

a) Primenimo sada prve formule da bismo odgovorili na pitanje postavljeno pod a). Transformišimo trougao ACD u odgovarajuću zvezdu sl.6.16



Sl.6.16

Relacija (9) kaže da treba pisati

$$R_A = \frac{R_{AC}R_{AD}}{R},$$

$$R_D = \frac{R_{AC}R_{CD}}{R},$$

$$R = R_{AC} + R_{AD} + R_{CD}.$$

Sada je moguće odmah naći ekvivalentnu otpornost, R_e, između tačaka A i B:

$$R_e = R_A + \frac{(R_C + R_{CB})(R_D + R_{BD})}{R_C + R_{CB} + R_D + R_{BD}},$$

$$R = (1 + 4 + 5)\Omega = 10\Omega,$$

b) $$R_A = \frac{1\cdot 4}{10}\ \Omega = 0,4\Omega,$$

$$R_C = \frac{1\cdot 5}{10}\ \Omega = 0,5\Omega,$$

$$R_D = \frac{4\cdot 5}{10}\ \Omega = 2\ \Omega,$$

$$R_e = 0,4\ \Omega + \frac{(0,5 + 2)(2+3)}{0,5 + 2 + 2 + 3}\ \Omega,$$

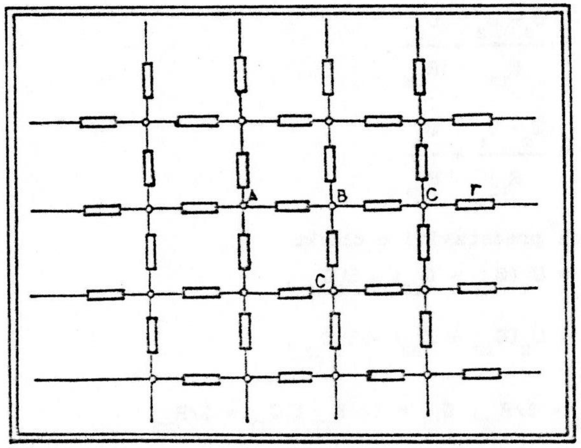
$$R_e = 0,4\Omega + \frac{12,5}{7,5}\ \Omega,$$

$$R_e = 2,067\ \Omega.$$

Pitanja i komentari.

U ovom zadatku smo našli R_e transformišući trougao ACD. Trebalo bi očekivati da dobijemo rezultat ako bismo transformisali trougao CBD. Proverite da li je tako. Koje još varijante za rešavanje uočavate? Radi vežbanja u primeni postupaka datih u ovom zadatku, nađite R_e shodno ostalim mogućim pristupima.

6.12) Posmatrajmo beskonačnu simetričnu vezu otpornika jednakih otpornosti $R = 1\Omega$ (sl.6.17.).



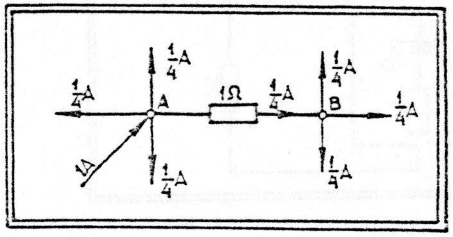
Sl.6.17.

a) Naći ekvivalentnu otpornost R_e između tačaka A i B.

b) Izvaditi granu AB. Koliko je sada ekvivalentna otpornost R_e'?

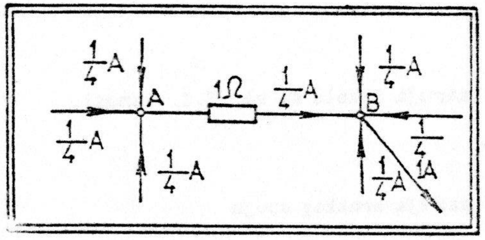
Rešenje

a) Zamislimo da smo za čvor A spojili pozitivan (+) pol nekog generatora koji daje struju I = 1A. Neka je negativan (-) pol priključen po obodu (beskonačno velike) mreže. Tada možemo reći da kroz otpornik koji povezuje tačke A i B teče struja i = 1/4A (princip simetrije, sl.6.18):



Sl.6.18.

Zamislimo sada da smo negativan (-) pol tog generatora spojili sa čvorom B, a pozitivan (+) pol sa obodom mreže. Ponovo možemo reći da kroz granu AB teče struja intenziteta i=1/4 A, samo ovog puta je njen smer prema čvoru (a ne od čvora za koji je spojen generator, kao u prethodnom slučaju) sl.6.19.



Sl.6.19.

Postavlja se pitanje kao treba tumačiti ono što nastaje ako pozitivan pol (+) generatora spojimo sa čvorom A, a negativan (-) pol sa čvorom B? Primenimo princip superpozicije! Videćemo da će u tom slučaju teći u grani AB struja intenziteta 1/4A + 1/4A = 1/2A. Pri tom će napon između čvorova A i B očigledno biti

$$U_{AB} = 1\Omega \cdot \frac{1}{2}\,A = \frac{1}{2}\,V\,.$$

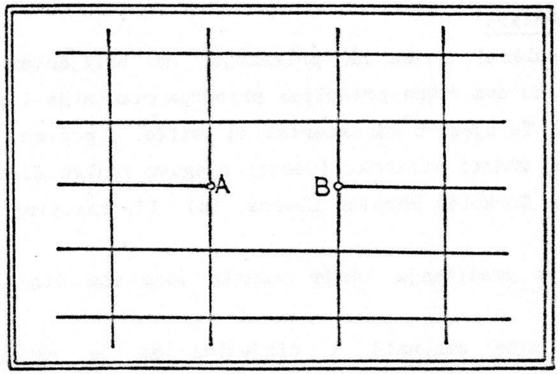
Generator koji pri naponu 1/2V daje u kolo struju od 1A "oseća" otpornost jednaku

$$\frac{1/2\ V}{1\ \ A} = \frac{1}{2}\Omega\,.$$

A to i jeste ono što, po definiciji, zovemo ekvivalentna otpornost između dve tačke kola. Dakle,

$$R_e = \frac{1}{2}\,\Omega\,.$$

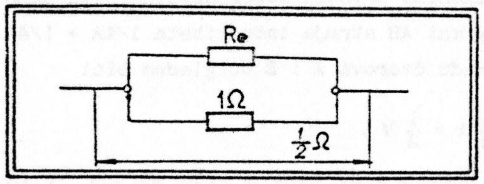
b) Kad izvadimo granu AB, mreža dobija ovakav šematski izgled (sl.6.20).



Sl.6.20.

Ekvivalentna otpornost između tačaka A i B biće neko R'_e. Stavimo li sada nazad granu AB, dobijamo mrežu koju smo analizirali i za koju smo ustanovili da je $R_e = \frac{1}{2}\,\Omega$. Na osnovu toga zaključujemo da paralelna veza $R'_e \,||\, 1\Omega$ ima otpornost 1/2Ω (sl.6.21).

Prema tome



Sl.6.21

$$\frac{1}{2}\,\Omega = \frac{R'_e \cdot 1\Omega}{R'_e + 1\Omega}\,.$$

Odavde je

$$R'_e \cdot \frac{1}{2}\,\Omega + \frac{1}{2}\,\Omega^2 = R'_e \cdot 1\Omega\,,$$

$$R'_e = 1\Omega\,.$$

Pitanja i komentari

Ovaj popularni zadatak prikazuje, na briljantan način, efikasnu primenu dva važna principa: principa simetrije i principa superpozicije. Tu njegovu karakteristiku ističe, s pravom, Purcell E. M. u svojoj zbirci zadataka (videti njegovu knjigu *Electricity and Magnetism*, Berkeley Physics Course, Vol. II, solution manual, strana 71).

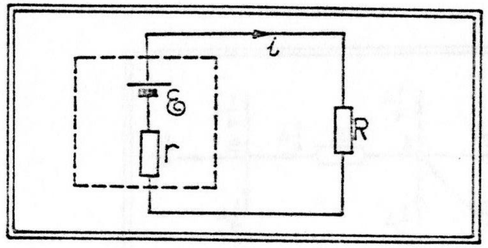
Zanimljivo proširenje ideje zadatka (ono što čini sadržaj tačke b):

Čitaoca može zanimati i činjenica da je ekvivalentna otpornost između tačaka A iu B takođe poznata. Ona iznosi $\frac{2}{\pi}\Omega$. Kao što profesor Purcell ističe, ovaj rezultat već ne može da se dobije primenom izloženih principa. Koji bi ste vi tu postupak primenili? Posebno, u rezultatu $R_{eAC} = \frac{2}{\pi}\,\Omega$ da li je intrigirajuća pojava broja π? Uopšte, na koje sve načine ulazi broj π u zadatke elektromagnetizma?

Za vežbu: znajući R_{eAC}, sastaviti neki sličan zadatak (na primer, koristeći ideju iz tačke b).

7. ELEKTROMOTORNA SILA

7.1.) Strujni izvor i otpornik R vezani su kao na sl. 7.1.



Sl.7.1.

Ne znamo kolika je e.m.s. $\mathcal{E}$ izvora i njegova unutrašnja otpornost r. Poznata je struja kratkog spoja ovog izvora, I_{KS}. Takođe se zna da ako umesto otpornika R imamo otpornost R_0, struja koju daje izvor je I_0.

a) Naći struju I u kolu sa sl. 7.1.

b) Na kraju zameniti ove posebne vrednosti: $I_{KS} = 2A$, $I_0 = 1A$, $R_0 = 100\Omega$, $R = 200\Omega$.

Rešenje:

Prema Omovom zakonu struja u kolu sa sl. 7.1. iznosi

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r}\,. \qquad (1)$$

Odavde vidimo da je struja kratkog spoja

$$I_{KS} = \frac{\mathcal{E}}{r}\,. \qquad (2)$$

Kako je u zadatku zadato sledeće: $i = I_0$, ako je $R = R_0$, biće

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_0 + r} \qquad (3)$$

Iz (2) proizilazi da je $\mathcal{E} = r \cdot I_{KS}$. Stavimo li ovo u (3), dobijamo

$$I_0 = \frac{rI_{KS}}{R + r},$$

odakle nalazimo r, a potom i $\mathcal{E}$:

$$I_0R_0 + I_0r = rI_{KS},$$

$$r = \frac{I_0R_0}{I_{KS} - I_0}, \tag{4}$$

$$\mathcal{E} = rI_{KS} = \frac{I_0I_{KS}R_0}{I_{KS} - I_0}. \tag{5}$$

Ako se sada sa rezultatima (4) i (5) vratimo u (1), imaćemo

$$i = \frac{\dfrac{I_0I_{KS}R_0}{I_{KS} - I_0}}{R + \dfrac{I_0R_0}{I_{KS} - I_0}}.$$

b)

$$r = \frac{1A \cdot 100\Omega}{2A - 1A} = 100\Omega ,$$

$$\mathcal{E} = 100\Omega \; 2A = 200V ,$$

$$i = \frac{200V}{200\Omega + 100\Omega} = \frac{200}{300} A ,$$

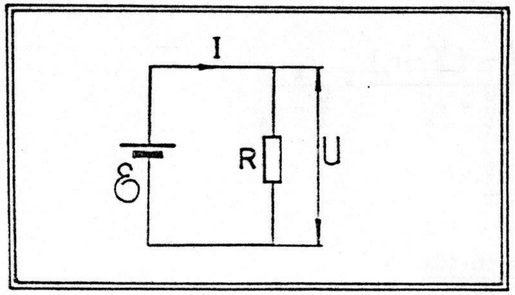
$$i = \frac{2}{3} A .$$

7.2) Nepoznatu otpornost R želimo da odredimo na sledeći način: vezaćemo R u kolo sa strujnim izvorom (sl.7.2.), pa ćemo struju I izmeriti ampermetrom koji ima unutrašnju otpornost r_A, a napon U pomoću voltmetra toliko velike unutrašnje otpornosti da se može smatrati da on ne remeti električni režim u kolu.

a) Nacrtati šemu vezivanja instrumenata i napisati formulu za izračunavanje otpornosti.

b) Ako zanemarimo unutrašnju otpornost ampermetra, koliku relativnu grešku (δ) u očitavanju činimo?

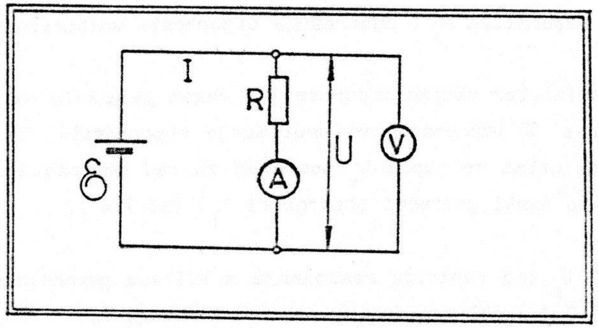
c) Izračunati δ ako je $r_A = 0,1\Omega$, I = 10A i U = 10V.



Sl. 7.2.

Rešenje:

a) Ampermetar i voltmetar treba vezati kao na šemi prikazanoj na sl.7.3.



Sl.7.3.

Odavde nalazimo

$$U = (R + r_A) \cdot I ,$$

$$R = \frac{U}{I} - r_A . \tag{1}$$

b) Označimo sa R' otpornost dobijenu po formuli (1) kada smatramo da je $r_A = 0$. Tada je tražena greška

$$\delta = \frac{R' - R}{R} ,$$

$$\delta = \frac{\frac{U}{I} - \left(\frac{U}{I} - r_A\right)}{\frac{U}{I} - r_A} = \frac{r_A}{\frac{U}{I} - R_A} ,$$

$$\delta \simeq \frac{r_A I}{U} .$$

c)
$$\delta \simeq \frac{0,1\Omega \cdot 10A}{10V} ,$$

$$\delta \simeq 0,1 .$$

Prema tome, greška koja se čini iznosi 10% .

Pitanja i komentari

Ako napon merimo instrumentom velike, ali ipak nezanemarljive, unutrašnje otpornosti, kako će ta činjenica uticati na tačnost merenja otpornosti R? Pokušajte da izračunate R u funkciji poznatih veličina: struje I, napona U, unutrašnje otpornosti ampermetra r_A i unutrašnje otpornosti voltmetra r_V.

7.3.) Potenciometar ukupne otpornosti R vezan je u kolo sa strujnim izvorom e.m.s. $\mathcal{E}$ (zanemarljive unutrašnje otpornosti). Sa klizača potencometra uzima se napon U_p potreban za rad potrošača P (koji se ponaša kao omski potrošač otpornosti R_p) (sl.7.4.).

a) Odrediti U_p kao funkciju rastojanja x klizača potenciometra od kraja 2 (sl.7.4.). Ukupna dužina potenciometra je L.

b) Napisati izraz za U_p ako je $R = 20\Omega$ i $R_p = 10\Omega$, a $\mathcal{E} = 10V$.

Za takav slučaj, c) Skicirajte funkciju $U_p = f(\text{položaj klizača})$.

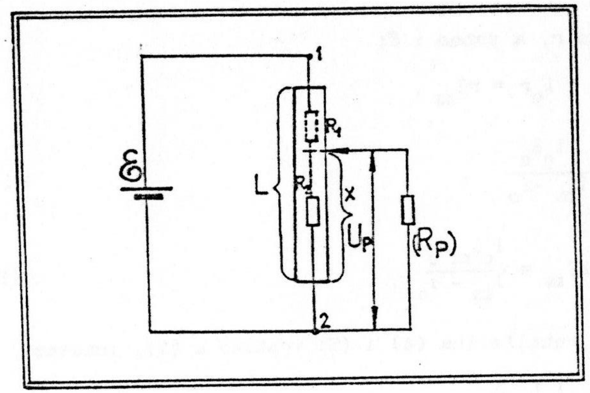
Rešenje:

Nađimo prvo, po Omovom zakonu, struju koju daje strujni izvor:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_e} . \qquad (1)$$

U ovoj relaciji R_1 je otpornost dela potenciometra od klizača do

tačke 1, a R_e je ekvivalentna otpornost dela potenciometra na dužini x i otpornosti R_p (paralelna veza R_2 i R_p). Pošto je



Sl.7.4.

$$R_e = \frac{R_2 R_p}{R_2 + R_p} , \qquad (2)$$

dobijamo za struju

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + \frac{R_2 R_p}{R_2 + R_p}} . \qquad (3)$$

Kako je traženi napon $U_p = R_e \cdot I$, biće

$$U_p = \frac{\mathcal{E}\,\frac{R_2 R_p}{R_2 + R_p}}{R_1 + \frac{R_2 R_p}{R_2 + R_p}} ,$$

$$U_p = \frac{R_2 R_p \mathcal{E}}{R_1 R_2 + R_1 R_p + R_2 R_p} . \qquad (4)$$

Otpornost potenciometra linearno varira sa položajem klizača, te je

$$R_1 = \frac{R}{L}(L - x) \quad \text{i} \quad R_2 = R\frac{x}{L} .$$

Na osnovu ovoga, definitivno dobijamo iz (4)

$$U_p = \frac{R_p \mathcal{E} y}{Ry(1-y) + R_p} , \tag{5}$$

gde smo skraćeno napisali, uvodeći oznaku $y = x/L$.

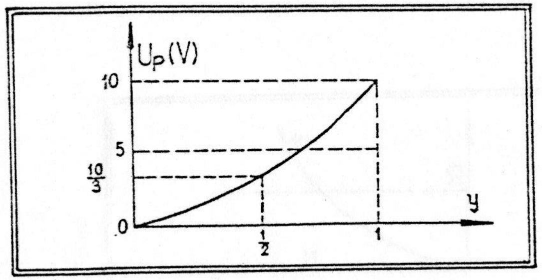
b) Ako je $R = 20\Omega$, $R_p = 10\Omega$ i $\mathcal{E} = 10\Omega$ iz (5) sledi

$$U_p = \frac{100y}{20y(1-y) + 10} . \tag{6}$$

c) Ako $y \to 0$, biće $U_p \simeq 10y$. Takođe, ako $y \to 1$, $U_p \simeq 10y$. Za $y = 1/2$,

imamo da je $U_p = 10\cdot\frac{1}{2} / (1 + 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}) = 5/1,5 = \frac{10}{3}$,

dakle kvalitativno grafik mora da izgleda ovako (sl. 7.5.):



Sl. 7.5.

Pitanja i komentari

Ispitajte izraz (5) ako je $R_p \gg R$. Da li u tom slučaju U_p zavisi od R_p? Koji je uzrok tome?

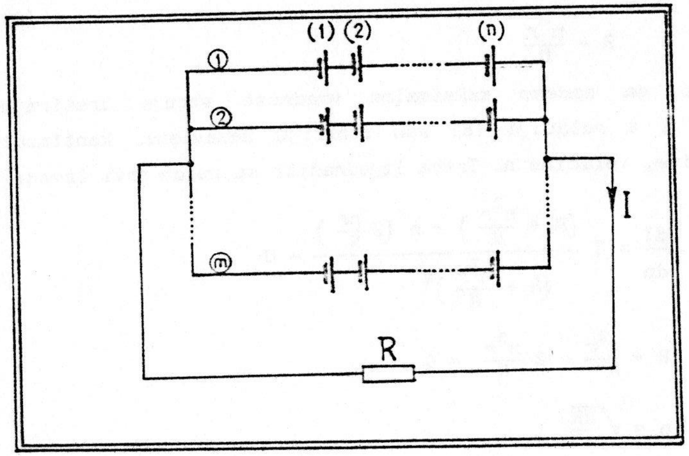
7.4) Strujni izvor ima e.m.s. $\mathcal{E}$ i unutrašnju otpornost r. Pretpostavimo da imamo N takvih izvora.

a) Pod kojim uslovima će redno-paralelna veza tih izvora struje davati najveću moguću struju kroz zadati otpornik otpornosti R?

b) Zameniti, na kraju, ove posebne vrednosti: $N = 100$, $R = 4\Omega$ i $r = 1\Omega$.

Rešenje:

Zamislimo da smo od datih izvora napravili m grana (koje smo paralelno vezali), a da smo u svaku granu redno vezali n izvora (videti sl. 7.6.).



Sl. 7.6.

Odmah je jasno da taj postupak kombinovanja strujnih izvora podrazumeva da važi relacija

$$m\cdot n = N . \tag{1}$$

Kod redno - paralelne veze datog tipa biće ekvivalentna e.m.s. određena relacijom

$$\mathcal{E}_e = n\mathcal{E} \tag{2}$$

dok će ekvivalentna unutrašnja otpornost iznositi

$$r_e = \frac{nr}{m} . \tag{3}$$

Samim tim, na osnovu Omovog zakona, određujemo struju koja teče kroz otpornik otpornosti R.

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r_e} . \tag{4}$$

Smenom (2) i (3) u (4) nalazimo

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + \frac{nr}{m}} \qquad (5)$$

Iz (1) možemo izraziti broj m u funkciji od broja n (m = N/n); kad taj rezultat uvrstimo u (5), dobijamo

$$I = \frac{n\mathcal{E}}{R + \frac{n^2 r}{N}} \ . \qquad (6)$$

Pokušajmo da nađemo maksimalnu vrednost struje tretirajući veličinu I u relaciji (6) kao funkciju nezavisne, kontinualno promenljive, veličine n. Treba izjednačiti sa nulom prvi izvod:

$$\frac{dI}{dn} = \mathcal{E}\,\frac{\left(R + \frac{n^2 r}{N}\right) - n\left(2\,\frac{nr}{N}\right)}{\left(R + \frac{n^2 r}{N}\right)^2} = 0 \ ,$$

$$R + \frac{n^2 r}{N} - 2\,\frac{n^2 r}{N} = 0 \ ,$$

$$n = \sqrt{\frac{NR}{r}} \ . \qquad (7)$$

b) $n = \sqrt{\frac{100\cdot 4\Omega}{1\Omega}}$,

$n = 20$,

$m = \frac{100}{20} = 5$.

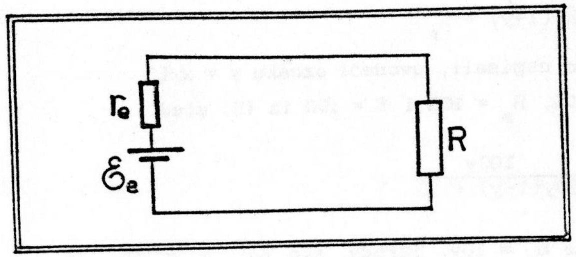
Da bi se udovoljilo uslovima zadatka, potrebno je, dakle, napraviti 5 grana (u svakoj po 20 redno vezanih strujnih izvora) i te grane paralelno vezati.

Pitanja i komentari

Mi smo, de facto, realizovali kolo sa slike 7.7.

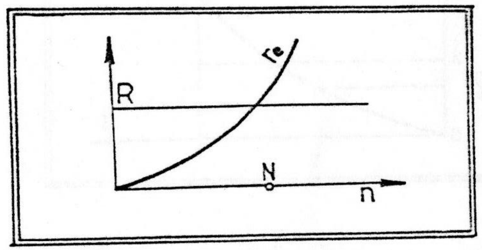
Naše rešenje $n = \sqrt{\frac{NR}{r}}$ proizilazi iz zahteva $r_e = R$ (pokažite ovo!), tj. iz zahteva da je spoljašnja otpornost, R, jednaka unutrašnjoj otpornosti r_e. Proučite još neke finese ove situacije, uz pomoć teksta u udžbeniku (§ 71, strana 141).

Primetite da zadatak ne bi imao rešenje ako uzmemo, na primer



Sl.7.7.

R = 1600Ω (umesto R = 4Ω). Dobili bismo, naime, n > 100, što protivreči samoj postavci zadatka. Pokušajte da se orijentišete u toj problematici grafički (sl. 7.8.).



Sl.7.8.

Šta biste rekli za rešenje zadatka u slučaju da je R = 49Ω? Tada se dobija n = 70. To daje za m necelobrojnu vrednost m = 10/7. O kakvim još ograničenjima u postavci našeg zadatka bi moglo biti reči?

Domaći zadatak: Pokušajte da rešite problem ako je fiksirano m = 2, a u granama je dopušteno da bude i nejednak broj serijski vezanih elemenata (n_1 u prvoj i n_2 u drugoj grani).

7.5) Strujni izvor e.m.s. $\mathcal{E}$ i unutrašnje otpornosti r napaja potrošač otpornosti R, sl. 7.9.

a) Kolika se snaga oslobada na otporniku?

b) koliki je koeficijenat korisnog dejstva η strujnog izvora?

c) Skicirajte η u funkciji od R.

Rešenje:

a) Obeležimo sa I struju koja teče u kolu. Tada je snaga oslobođena na otporniku

$$P = RI^2,$$

$$P = R\,\frac{\mathcal{E}^2}{(R + r)^2}\,, \qquad (1)$$

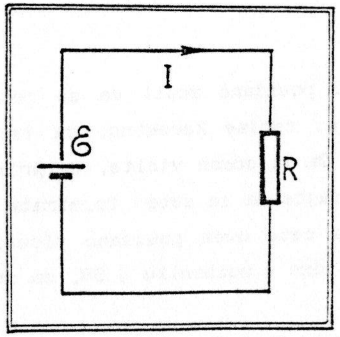
pošto je struja, po Omovom zakonu, $I = \mathcal{E}/(R + r)$.

b) Koeficijenat korisnog dejstva strujnog izvora je, po definiciji,

$$\eta = \frac{P}{P_0}\,, \qquad (2)$$

gde je P_0 snaga strujnog izvora:

$$P_0 = \mathcal{E}I = \frac{\mathcal{E}^2}{R + r}\,. \qquad (3)$$



Sl.7.9.

Imajući u vidu (1) i (3), dobijamo

$$\eta = \frac{\dfrac{R\mathcal{E}^2}{(R + r)^2}}{\dfrac{\mathcal{E}^2}{R + r}}\,,$$

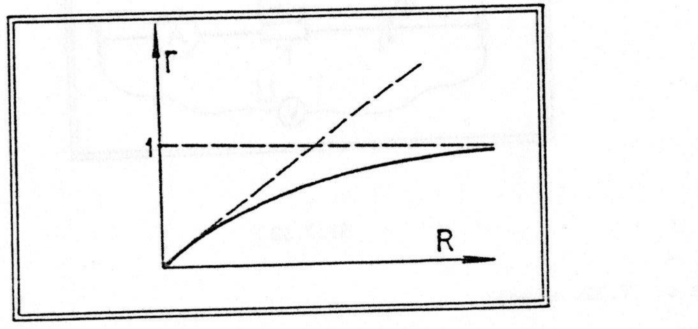
$$\eta = \frac{R}{R + r} \qquad (4)$$

c) Ako je $R \ll r$, imamo $\eta \simeq \frac{R}{r}$. Kada je $R \gg r$, biće $\eta \simeq 1 - \frac{r}{R}$.

Grafik bi, dakle, trebalo da izgleda kao na sl.7.10.

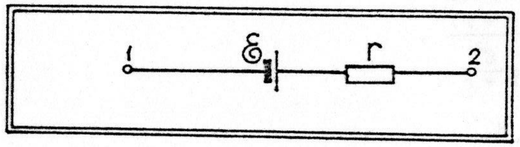
<u>Pitanja i komentari.</u>

Lako je pokazati da funkcija $P = f(R)$ ima maksimum za $R = r$ (korisna snaga je maksimalna pri uslovu da je spoljašnje opterećenje jednako unutrašnjoj otpornosti strujnog izvora). Zašto i η nema maksimum na tom mestu? Pokušajte da razjasnite postojanje maksimuma $P_{max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r}$ za $R = r$. Skicirajte funkciju $P = f(R)$. Kada je bitno da ja P što veće? Kada je bitno da je η što veće?



Sl. 7.10.

7.6.) U jednoj grani nekog strujnog kola izmeren je napon U između tačaka 1 i 2 (videti sl. 7.11.), a istovremeno je ustanovljeno da je tada kroz granu tekla struja I. Međutim, ako je struja i, napon je u.



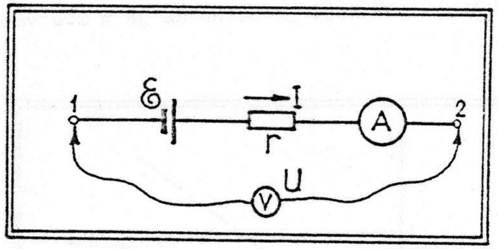
Sl. 7.11.

a) Naći parametre strujnog izvora u toj grani: e.m.s. $\mathcal{E}$ i unutrašnju otpornost r.

b) Na kraju zameniti: u = 10V, U = 5V, i = 2A, I = 1A.

Rešenje:

Prvo merenje:



Sl.7.12.

Iz sl. 7.12. sledi:

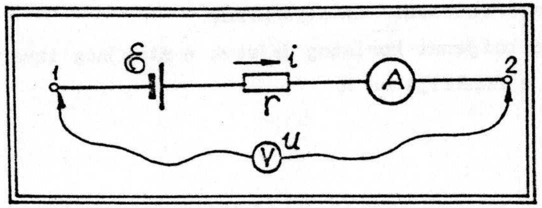
$$U = -\mathcal{E} + rI \quad . \qquad (1)$$

Drugo merenje:

Iz 7.13. sledi:

$$u = -\mathcal{E} + ri \quad . \qquad (2)$$

Iz (1) nalazimo $\mathcal{E} = rI - U$. Stavljajući ovu vrednost u (2), dobijamo



Sl.7.13.

$$u = -rI + U + ri \ ,$$

$$u = r(i-I) + U \ ,$$

$$r = \frac{u - U}{i - I} \ , \qquad (3)$$

$$\mathcal{E} = \frac{u - U}{i - I} I - U \qquad (4)$$

b)

$$\mathcal{E} = \frac{10V - 5V}{2A - 1A} \cdot 1A - 5V \ ,$$

$$\mathcal{E} = 0 \ V \ ,$$

$$r = \frac{10V - 5V}{2A - 1A} \ ,$$

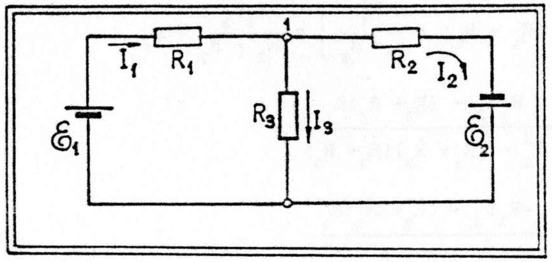
$$r = 5\Omega \ .$$

Pitanja i komentari

Potrebno je brzo i pouzdano znati da se relacija tipa (1) (Omov zakon za deo kola) napiše korektno, sa ispravnim znacima ispred veličine $\mathcal{E}$ i rI. Da li odmah vidite, na primer, da ne može biti U = + $\mathcal{E}$ + rI? Pokušajte da za sebe formirate neki ubedljivi argument na osnovu koga ćete uvek pouzdano pisati tu relaciju. Pročitajte još jednom o tome u udžbeniku § 68, na strani 130.

7.7.) a) Izračunati struje kroz sve otpornike u kolu sa sl. 7.14.

b) Na kraju zameniti: $\mathcal{E}_1 = 1V$; $\mathcal{E}_2 = 2V$; $R_1 = 1\Omega$; $R_2 = 2\Omega$ i $R_3 = 3\Omega$.



Sl. 7.14.

Rešenje:

a) Pretpostavimo da struje teku u smerovima pokazanim na sl. 7.14. Prvo kirhofovo pravilo daje za čvor 1 daje

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (1)$$

Drugo Kirhofovo pavilo primenjeno na konture $\mathcal{E}_1R_1 1R_2\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2R_2 1R_3\mathcal{E}_2$ daje, respektivno

$$\mathcal{E}_1 - R_1I_1 - R_3I_3 = 0 \ , \qquad (2)$$

$$\mathcal{E}_2 + R_3I_3 - R_2I_2 = 0 \ . \qquad (3)$$

Stavimo $I_3 = I_1 - I_2$ (sledi iz (1) u (2) i (3):

$$\mathcal{E}_1 - R_1I_1 - R_3I_1 = -R_3I_2 \ , \qquad (4)$$

$$\mathcal{E}_2 + R_3I_1 = R_3I_2 + R_2I_2 \ . \qquad (5)$$

Ako I_2 izračunamo iz (4) i zamenimo u (5), dobijamo

$$\mathcal{E}_3 + R_3I_1 = (R_3 + R_2)\ \frac{1}{R_3}\ (R_1I_1 + R_3I_1 - \mathcal{E}_1), \text{ tj.}$$

$$R_3\mathcal{E}_2 + I_1R_3 = (R_1 + R_3)(R_2 + R_3)\ I_1 - (R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 \ ,$$

$$I_1 = \frac{R_3\mathcal{E}_2 + (R_2 + R_3)\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3} \ . \qquad (6)$$

Sada je iz (2) lako naći I_3:

$$I_3 = \frac{1}{R_3}\left[\mathcal{E}_1 - R_1\,\frac{R_3\mathcal{E}_2 + (R_2 + R_3)\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}\right] . \qquad (7)$$

Na kraju, iz (3) nalazimo I_2:

$$I_2 = \frac{1}{R_2}\left[\ \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1 - R_1\,\frac{R_3\mathcal{E}_2 + (R_2 + R_3)\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}\right] . \qquad (8)$$

b) $$I_1 = \frac{3\Omega\cdot 2V + (2\Omega + 3\Omega)1V}{1\Omega\cdot 2\Omega + 2\Omega\cdot 3\Omega + 1\Omega\cdot 3\Omega} \ ,$$

$$I_1 = \frac{6A + 5A}{2 + 6 + 3} \ ,$$

$$I_1 = 1A \ .$$

$$I_3 = \frac{1}{3\Omega}\ (1V - 1\Omega\cdot 1A) \ ,$$

$$I_3 = 0A \ .$$

$$I_2 = \frac{1}{2A}\ (2V + 1V - 1\Omega\cdot 1A) \ ,$$

$$I_2 = 1A \ .$$

Pitanja i komentari

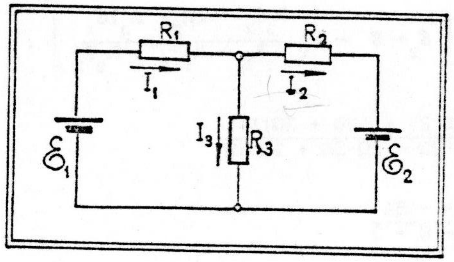
Polazeći od relacija (1),(2) i (3) mogu se formirati ovakve dve jednačine sa dve nepoznate struje:

$$\mathcal{E}_1 - (R_1 + R_3)I_1 + R_3I_2 = 0 \ , \qquad (9)$$

$$\mathcal{E}_2 + R_3I_1 - (R_2 + R_3)I_2 = 0 \ . \qquad (10)$$

Postoji metod, poznat kao metod **konturnih struja**, koji omogućava da se jednačine ovog tipa mogu ditrektno pisati, preskakajući stadijum Kirhofovih pravila. To olakšava račun oko nalaženja nepoznatih struja. Pokušajte, u ovom konkretnom slučaju, posmatrajući strukturu jednačina (9) i (10), prepoznati postupak koji je u suštini konturnih struja. Za analizu opšteg slučaja videti, na primer, u udžbeniku Dodatak 3. Metod konturnih struja (koji valja izučavati uz građu datu u §70, strana 135) na strani 562.

7.8.) a) Kolika se snaga oslobađa u otpornicima otpornosti R_1 i R_2 u kolu na sl. 7.15.



Sl. 7.15.

b) Izračunati te snage ako $\mathcal{E}_1 = 12\text{V}$, $\mathcal{E}_2 = 12\text{V}$, $R_1 = 100\Omega$, $R_2 = 200\Omega$ i $R_3 = 300\Omega$.

Rešenje:

Jednačine koje proizilaze iz primene Kirhofovih pravila izgledaju (uz oznake primenjene na sl.7.13.)

$$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0, \qquad (1)$$

$$-\mathcal{E}_2 + R_3 I_3 - I_2 R_2 = 0\ , \qquad (2)$$

$$I_1 = I_2 + I_3\ . \qquad (3)$$

Iz ovih jednačina lako dobijamo sledeće dve jednačine sa dve nepoznate struje

$$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_1 + R_3 I_2 = 0\ , \qquad (4)$$

$$-\mathcal{E}_2 - R_3 I_2 + R_3 I_1 - R_2 I_2 = 0\ . \qquad (5)$$

Odavde ćemo prvo naći struju I_1, zamenjujući I_2 iz (5) u (4):

$$\mathcal{E}_1\ (R_1 + R_3)I_1 + R_3(-\mathcal{E}_2 + R_3 I_1)\frac{1}{R_2 + R_3} = 0,$$

$$I_1\left[-(R_1 + R_3) + \frac{R_3^2}{R_2 + R_3}\right] = \frac{R_3\mathcal{E}_2}{R_2 + R_3} - \mathcal{E}_1\ ,$$

$$I_1 = \frac{R_3\mathcal{E}_2 - (R_2 + R_3)\mathcal{E}_1}{R_3^2 - (R_1 + R_3)(R_2 + R_3)}\ ,$$

$$I_1 = \frac{-R_3\mathcal{E}_2 + (R_2 + R_3)\mathcal{E}_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}\ . \qquad (6)$$

Posle toga lako je napisati izraz za struju I_2:

$$I_2 = \frac{1}{R_3}\left[-E_1 + (R_1 + R_3)\frac{(R_2 + R_3)\mathcal{E}_1 - R_3\mathcal{E}_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}\right]. \qquad (7)$$

Tražene snage su

$$P_1 = R_1 I_1^2\ , \qquad (8)$$

$$P_2 = R_2 I_2^2\ . \qquad (9)$$

Izračunavajući najpre struje, a onda snage po ovim formulama, dobijamo tražene rezultate koji su predmet drugog dela zadatka.

(b)
$$I_1 = \frac{(200 + 300)12\text{A} - 300\cdot 12\text{A}}{100\cdot 200 + 100\cdot 300 + 200\cdot 300}\ ,$$

$$I_1 = \frac{200\cdot 12}{20 + 30 + 60}\cdot 10^{-3}\text{A}\ ,$$

$$I_1 \simeq 21{,}82\ \text{mA}.$$

$$I_2 = \frac{1}{300}\left[-12 + (100 + 300)\cdot 21{,}82\cdot 10^{3}\right]\text{A}\ ,$$

$$I_2 = -10{,}9\ \text{mA}.$$

$$P_1 = 100(21{,}82)^2\cdot 10^{-6}\ \text{W},$$

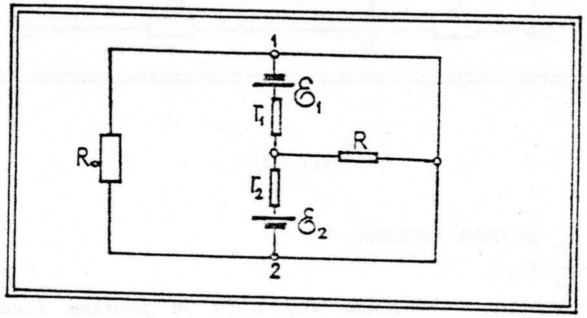
$$P_1 = 4{,}76\ 10^{-2}\text{W}\ .$$

$$P_2 = 200\cdot(-10{,}9)^2\cdot 10^{-6}\text{W},$$

$$P_2 = 2{,}38\cdot 10^{-2}\ \text{W}.$$

Dovršite zadatak nalazeći snagu koja se oslobađa u trećem otporniku.

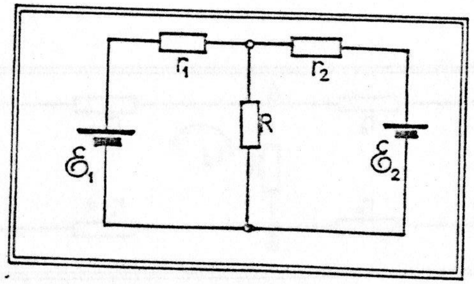
7.9.) Naći snage koje se oslobađaju u svim otpornicima u kolu na sl. 7.16.



Sl. 7.16.

Rešenje:

Prvo treba primetiti da je napon između tačaka 1 i 2 ovog kola jednak nuli (jer postoji kratki spoj, putem 1→3→2). To znači da kroz otpornik R_0 ne teče struja, grana sa tim otpornikom se može eliminisati, te se naše kolo svodi na šemu prikazanu na sl. 7.17.

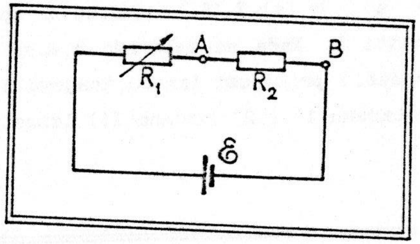


Sl. 7.17.

koja je identična šemi iz predhodnog zadatka 7.8. (zanemarujući razlike u oznakama otpornosti).

7.10.) U kolu sa sl. 7.18. naći napone između tačaka A i B (poznate veličine su e.m.s. $\mathcal{E}$ i otpornosti R_1 i R_2 . Ako je R_2 otpornost potrošača koji ne sme dospeti na napon veći od U_{max} , odabrati promenljivu otpornost R_1 tako da ovaj uslov bude zadovoljen pri datoj e.m.s. $\mathcal{E}$ Na kraju zameniti ove posebne vrednosti: $\mathcal{E}$ = 30V, U_{max} = 15V, R_2 = 10Ω.

Rešenje:



Sl.7.18.

Struju u kolu nalazimo po Omovom zakonu

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} .$$

Traženi napon U_{AB} je onda

$$U_{AB} = R_2 i = R_2 \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2} .$$

Zahtev $U_{AB} \le U_{max}$ dobija oblik

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{E} \le U_{max} ,$$

a odavde se lako nalazi da treba da bude

$$R_1 \ge \frac{R_2}{U_{max}} (\mathcal{E} - U_{max}) .$$

Smenom zadatih vrednosti nalazimo

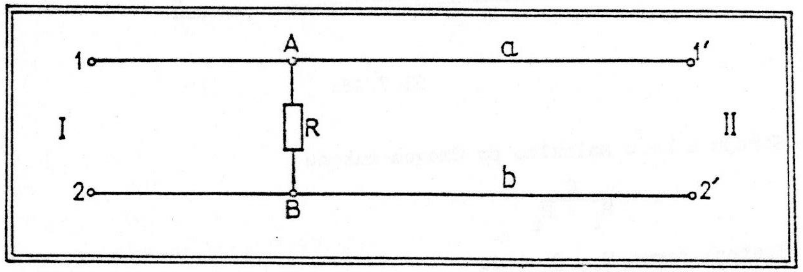
$$R_1 \geq \frac{10\Omega}{15V}(30V - 15V) ,$$

$$R \leq 10\Omega .$$

Pitanja i komentari

Paralelno otporniku R priključili smo potrošač otpornosti r. Ako ovaj potrošač ne sme dospeti na napon veći ili jednak U_{max}, obezbedite u ovom slučaju zadovoljenje tog uslova. Posebno posmatrajte slučajeve $R_2 \gg r$ i $R_2 \ll r$ i komentarišite te formule.

7.11.) Dve žice, a i b (sl.7.19.), dužine L spojene su pomoću otpornika otpornosti R. Kada se baterija e.m.s. $\mathcal{E}$ (zanemarljive unutrašnje otpornosti) priključi između krajeva 1 i 2 (na strani I), napon između tačaka 1' i 2' (strana II) iznosi U_{II}.

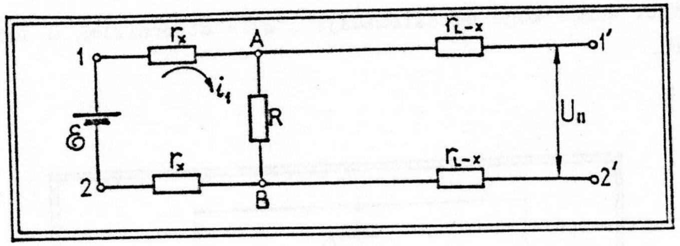


Sl.7.19.

Obratno, ako se baterija priključi na strani II, napon na strani I iznosi U_I. Naći rastojanje između tačaka 1 i A, tj. između tačaka 2 i B (lokalizovati mesto gde je priključen otpornik). Na kraju zameniti ove posebne vrednosti: $\mathcal{E}$ = 12V, U_I = 8V, U_{II} = 3V i L = 100m.

Rešenje:

U prvom aktu merenja, ekvivalentno kolo izgleda kao na sl. 7.20.



Sl.7.20.

Otpornost r_x je data izrazom

$$r_x = \gamma x,$$

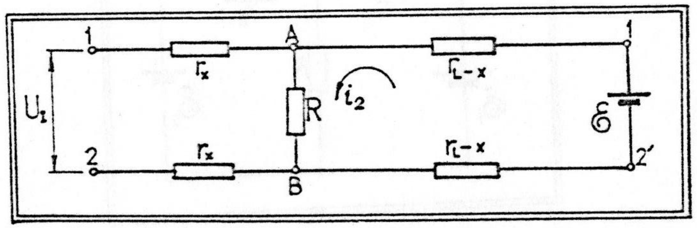
gde je x traženo odstojanje otpornika od početka žica. Nadimo struju i u konturi 1AB21:

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}}{R + 2r_x} .$$

U ostatku kola ne teče struja, te je napon na kraju žica jednak naponu između tačaka A i B:

$$U_{II} = Ri_1 = R\frac{\mathcal{E}}{R + 2r_x} .$$

Pogledajmo sada šemu koja važi u drugom aktu merenja, sl.7.21.



Sl.7.21.

Ovde je otpornost r_{L-x} ekvivalentna otpornost dela žice između tačaka A i 1' (tj. B i 2').

$$r_{L-x} = \gamma\,(L - x)\,.$$

Nađimo struju i_2 pomoću Omovog zakona:

$$i_2 = \frac{\mathcal{E}}{R + 2r_{L-x}}\,,$$

i odmah zatim napon U_I

$$U_I = Ri_2 = R\,\frac{\mathcal{E}}{R + 2r_{L-x}}\,.$$

Iz ovih relacija nalazimo:

$$R + 2r_x = R\,\frac{\mathcal{E}}{U_{II}}\,,$$

$$2r_x = R\,(\frac{\mathcal{E}}{U_{II}} - 1);$$

$$R + 2r_{L-x} = R\,\frac{\mathcal{E}}{U_I}\,;$$

$$2r_{L-x} = R\,(\frac{\mathcal{E}}{U_1} - 1).$$

Nađimo količnik r_x/r_{L-x}:

$$\frac{r_x}{r_{L-x}} = \frac{\frac{\mathcal{E}}{U_{II}} - 1}{\frac{\mathcal{E}}{U_I} - 1}\,.$$

Pošto je

$$\frac{r_x}{r_{L-x}} = \frac{\gamma\,x}{\gamma\,(L-x)} = \frac{x}{L - x}\,,$$

možemo pisati

$$\frac{x}{L - x} = \frac{\frac{\mathcal{E}}{U_{II}} - 1}{\frac{\mathcal{E}}{U_I} - 1}$$

Odavde lako nalazimo

$$x = \frac{\alpha}{\alpha + 1}\,L\,.$$

U ovom izrazu smo upotrebili oznaku

$$\alpha = \frac{\mathcal{E}/U_{II} - 1}{\mathcal{E}/U_I - 1}\,.$$

Smenom poznatih vrednosti dobijamo:

$$\alpha = \frac{12/3 - 1}{12/8 - 1} = \frac{3}{0,5} = 6,$$

$$\frac{x}{L} = \frac{6}{6 + 1} \simeq 0,857\,;$$

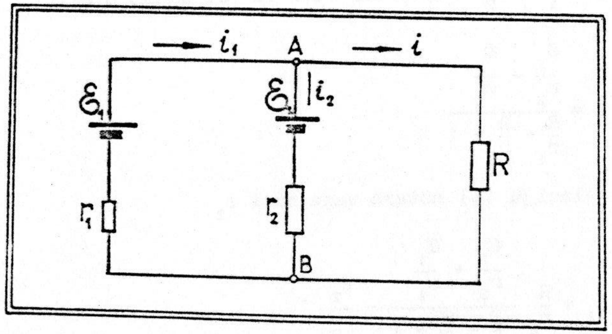
$$x \simeq 85,7\text{m}\,.$$

Pitanja i komentari

Vidimo iz približne analize da se rezultat može dobiti ne poznavajući konkretnu vrednost otpornosti R. Razume se da izbor otpornosti utiče na merenje veličina U_I i U_{II}. Izračunajte R u funkciji ovih napona, za dato x. Koja još veličina figuriše u tom izrazu, a nije eksplicitno bila potrebna za rešavanje ovog zadatka? Kako se formula za R ponaša pri $x = L/2$?

Pri merenju napona U_I i U_{II} čini se neka greška; ona utiče na tačnost poznavanja distancije x. Na kojem mestu je greška u određivanju x najmanja?

7.12.) a) Odrediti struje u složenom kolu sa sl. 7.22.



Sl. 7.22.

b) Na kraju, zameniti ove posebne vrednosti: $\mathcal{E}_1 = 100V$, $\mathcal{E}_2 = 200V$, $r_1 = 50\Omega$, $r_2 = 100\Omega$ i $R = 100\Omega$.

Rešenje:

a) Prema prvom Kirhofovom pravilu, za čvor A važi

$$i_1 = i_2 + i . \tag{1}$$

Prema drugom Kirhofovom pravilu, za konturu $ARB\mathcal{E}_2A$ važi

$$\mathcal{E}_2 = Ri - r_2 i_2 , \tag{2}$$

a za konturu $ARB\varepsilon_1A$

$$\mathcal{E}_1 = Ri + r_1 i_1 . \tag{3}$$

Iz sistema (1)-(3) moguće je naći nepoznate struje. Prvo, iz (2) sledi

$$- i_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} - \frac{R}{r_2} i . \tag{4}$$

Slično, iz (3) imamo

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - \frac{R}{r_1} i . \tag{5}$$

Kad saberemo (4) i (5), dobijamo

$$i = \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_1}{r_1} - i\left(\frac{R}{r_2} + \frac{R}{r_1}\right) , \tag{6}$$

budući da je $i_1 - i_2 = i$, prema (1). Iz (6) odmah sledi

$$i = \frac{\frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_1}{r_1}}{\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} + 1} . \tag{7}$$

Koristeći relaciju (4) možemo sada naći i_2

$$i_2 = \frac{R}{r_2} \, \frac{\frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_1}{r_1}}{\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} + 1} - \frac{\varepsilon_2}{r_2} . \tag{8}$$

Na kraju, iz (1) nalazimo zadnju nepoznatu struju

$$i_1 = \left(\frac{R}{r_2} + 1\right) \frac{\frac{\mathcal{E}_2}{r_2} + \frac{\mathcal{E}_1}{r_1}}{\frac{R}{r_1} + \frac{R}{r_2} + 1} - \frac{\mathcal{E}_2}{r_2} . \tag{9}$$

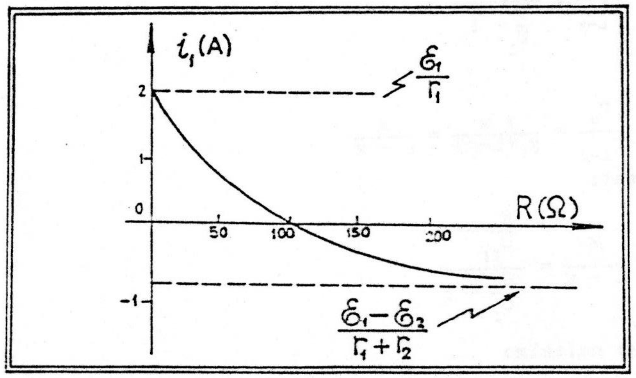
(b)
$$i = \frac{\frac{200V}{100\Omega} + \frac{100V}{50\Omega}}{\frac{100\Omega}{50\Omega} + \frac{100\Omega}{100\Omega} + 1} = \frac{2 + 2}{2 + 1 + 1} = 1A .$$

$$i_2 = \frac{100\Omega}{100\Omega} 1A - \frac{200V}{100\Omega} = 1A - 2A = -1A .$$

$$i_1 = 1A - 1A = 0 .$$

Pitanja i komentari

Činjenica da je u ovom zadatku $i_1 = 0$ je "slučajna", tj. taj rezultat je posledica usvojene posebne vrednosti za otpornost potrošača ($R = 100\Omega$) koji je vezan tako da ga napajaju dva strujna izvora (e.m.s. $\mathcal{E}_1$ i $\mathcal{E}_2$), unutrašnjih otpornosti r_1 i r_2) u paralelnoj vezi. Da li ste mogli, unapred zaključiti da mora postojati takvo R da je $i_1 = 0$? Pokušajte da skicirate zavisnost struje i_1 od otpornosti R. Da li je tačna naša skica prikazana na sl. 7.23.?

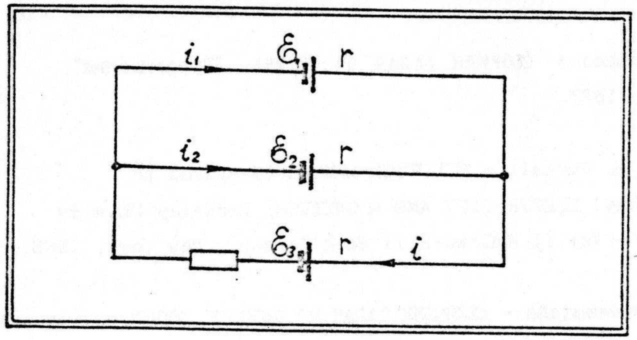


Sl.7.23.

7.13. Tri strujna izvora, iste unutrašnje otpornosti r a različitih e.m.s. ($\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ i $\mathcal{E}_3$) vezani su kao na sl. 7.24. i napajaju potrošač otpornosti R.

a) Naći struje u svim granama složenog kola.

b) Zamenite, na kraju, ove posebne vrednosti: $\mathcal{E}_1 = 10V$, $\mathcal{E}_2 = 11V$, $\mathcal{E}_3 = 12V$, $r = 1\Omega$ i $R = 500\Omega$.



Sl. 7.24.

Rešenje:

a) Da bi se našle nepoznate struje i_1, i_2 i i napisaćemo pomocu Kirhofovih pravila ove tri jednačine:

$$i = i_1 + i_2 , \tag{1}$$

$$\mathcal{E}_1 + ri_1 = -\mathcal{E}_2 + ri_2 , \tag{2}$$

$$-\mathcal{E}_1 + ri_1 = -(R + r)i + \mathcal{E}_3 . \tag{3}$$

Ako iz (2) izračunamo i_2 i to zamenimo u (1) dobijamo

$$i = 2i_1 + \frac{1}{r}(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3) \tag{4}$$

Nakon ovoga možemo sa vrednošću za i iz (4) ići u (3), što odmah daje

$$-\mathcal{E}_1 + ri_1 = \mathcal{E}_3 - (R + r) \left[\frac{1}{r}(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) + 2i \right] . \tag{5}$$

Iz (5) dobijamo bez teškoca

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3 - \frac{R + r}{r}(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)}{r + 2(R + r)} . \tag{6}$$

Na taj način smo našli struju u prvom strujnom izvoru. Nakon toga, struju kroz drugi izvor dobijamo iz relacije (2)

$$i_2 = \frac{1}{r}(\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1 + ri_1) . \tag{7}$$

Struju kroz potrošač, i, nalazimo primenom jednačine (1).

(b)
$$i_1 = \frac{10V + 12V - \frac{101\Omega}{1\Omega}(11V - 10V)}{1\Omega + 2(100 + 1)\Omega} ,$$

$$i_1 = \frac{22 - 101}{203} A ,$$

$$i_1 = -0,389 \text{ A} .$$

$$i_2 = \frac{1}{1\Omega}\left[11V - 10V + 1\Omega\,(-1)\,0,389 \text{ A}\right],$$

$$i_2 = 1A - 0,389 \text{ A} = 0,611 \text{ A} .$$

$$i = -\,0,389 \text{ A} + 0,611\text{A} ,$$

$$i = 0,222 \text{ A} .$$

LITERATURA

1. R.C.Cross - ELECTRICITY AND MAGNETISM, Longman Australia Pty Limited, Hawthorn Victoria Australia, 1976.

2. Д.И.Сахаров - СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ФИЗИКЕ, "Просвещение", Москва, 1973.

3. Edward M. Purcell - SOLUTION MANUAL (prepared to accompany) ELECTRICITY AND MAGNETISM, Berkeley Physics Course - Vol.II McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

4. В.С.Волькенщтайн - СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ, "Наука", Москва, 1973.

5. Фейнман, Лейтон, Сэндс - ФЛФ, ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ С ОТВЕТАМИ И РЕШЕНИЯМИ, "Мир" Москва, 1978.

6. И А.Яковлев - СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ - ЕЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ, "Наука", Москва, 1977.

7. И.В.Савельев - СБОРНИК ВОПРОСОВ И ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ, "Наука", Москва, 1988.

8. Г.И.РИбакова - СБОНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕЙ ФИЗИКЕ, "ВИшая школа", Москва, 1984.

9. А.Г.Чертов и др. - ЗАДАЧНИК ПО ФИЗИКЕ, "ВИшая школа", Москва, 1973.